Μαθηματικός Λογισμός Ι

14η Διάλεξη

(Ολοκλήρωμα)

Μέρος ΣΤ': Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

1. Στατιστική – Πιθανότητες
2. Γεωμετρία.
3. Οικονομία / Επιχειρήσεις

Γενικά το ολοκλήρωμα $\int \cdot dx$ αντιστοιχεί στο άθροισμα Σ

το άθροισμα Σ εμφανίζεται στα διακριτά μοντέλα (διακριτός χρόνος).
ενώ το ολοκλήρωμα $\int$ εμφανίζεται σε συνεχή μοντέλα.

1 Πιθανότητες – Στατιστική

Διακριτό μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$Pr[X=x] = \begin{cases} 0.3 & , x=1 \\ 0.5 & , x=2 \\ 0.2 & , x=3 \end{cases}$$

Η μέση τιμή της τυχ. μεταβλ. E(x) δίνεται από τον τύπο -

$$E(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}9$$

Συνεχές μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0 \quad (\text{εκθετική } \beta = 1)$$

Η μέση τιμή της X δίνεται από το ολοκλήρωμα $E(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x\left(-e^{-x}\right)'dx =$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} (x)'\left(-e^{-x}\right)dx =$$

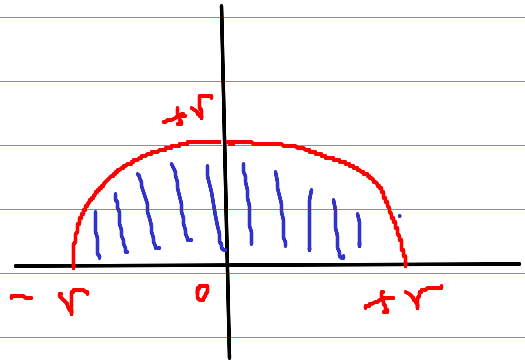
$$= \left[0 - 0\right] + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx =$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \left[0 - (-1)\right] = 1$$

Εφαρμογές στη Γεωμετρία για υπολογισμό

1. Εμβαδού
2. Μήκος καμπύλης
3. Όγκος στερεού

~~[illegible]~~

① 

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από το ημικύκλιο και πάνω από τον άξονα xx'

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\text{Εμβαδόν} = \int_{-r}^{+r} f(x)\,dx = \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \;\overset{x = r\sin t}{\underset{dx = r\cos t\,dt}{=}}$$

$$\left(x = +r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \;,\; x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot (r\cos t)\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r\sqrt{1 - \sin^2 t}\; r\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t\,dt$$

$$= \left[\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t = \\ &= \cos^2 t + \cos^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 2\cos^2 t - (\cos^2 t + \sin^2 t) = \\ &= 2\cos^2 t - 1 \end{aligned} \right.$$

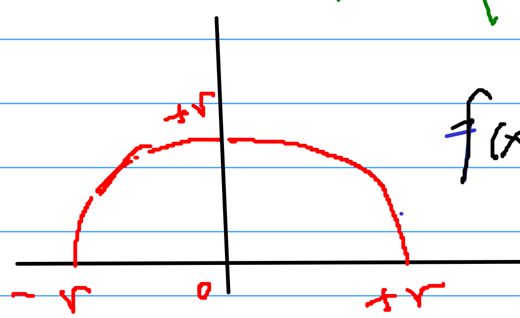
$$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = r^2 \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2$$

2) Μήκος καμπύλης $y = f(x)$, $[\alpha, b]$

$$L = \int_{\alpha}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Να υπολογίσετε το μήκος της ημιπεριφέρειας της προηγούμενης άσκησης



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$x \in [-r, +r]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

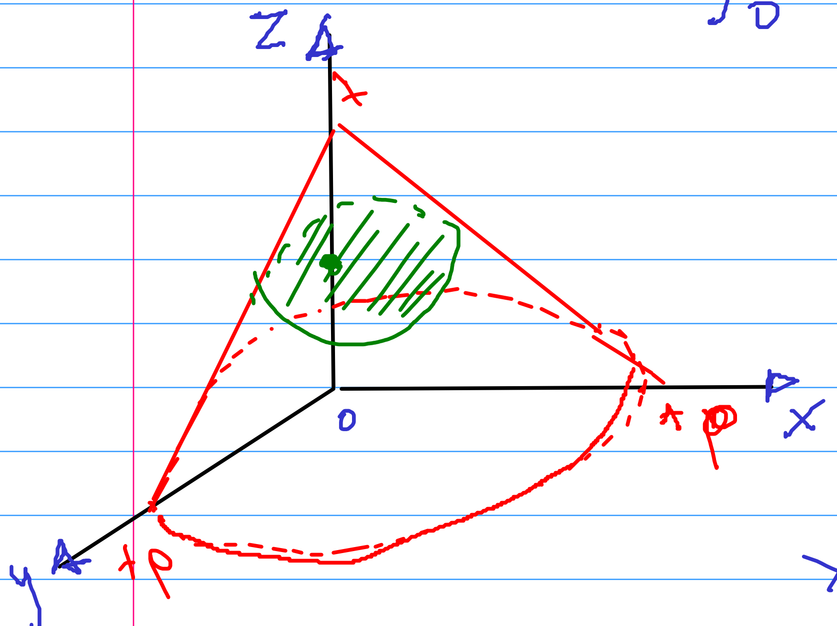
$$L = \int_{-r}^{+r} \sqrt{1 + \left[-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2}\, dx = \int_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$=$ (μετασχηματίζω όπως προηγούμενα $x = r\sin t$) $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{r}{r\cos t}\, r\cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\, dt = r[t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi r$$

③ Όγκος μέσω παράλληλων τεμαχισμών

$$V = \int_0^a E(z)\,dz$$



Να υπολογισθεί ο όγκος του κανονικού ορθού κυκλικού κώνου όπου έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

- Η βάση του είναι ένας κύκλος στο επίπεδο x-y με κέντρο την αρχή των αξόνων O = (0,0,0) και ακτίνας ρ.
- Η κορυφή του κώνου βρίσκεται πάνω στον άξονα Z στο σημείο (0,0,ρ) δηλ. το ύψος του κώνου είναι ρ.

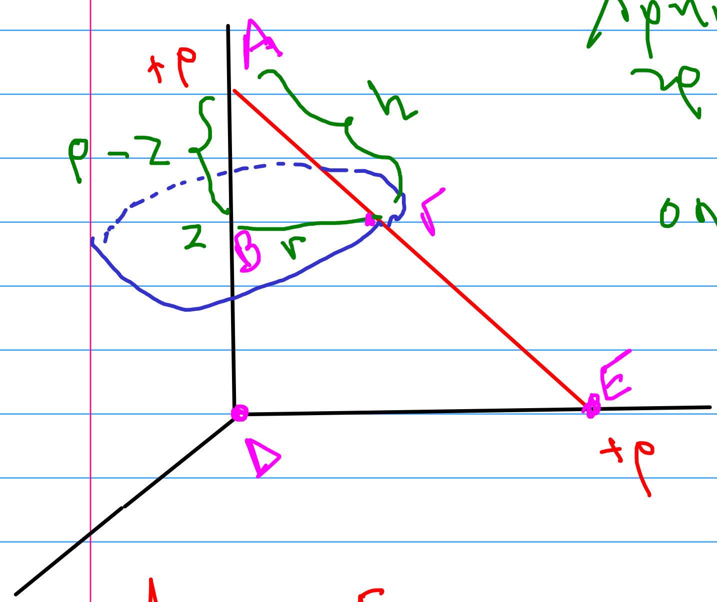
Ανάλυση προβλήματος: Τεμαχίζουμε τον κώνο σε λεπτές κυκλικές φέτες. Η πρώτη μεγαλύτερη φέτα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο x-y. Στη συνέχεια οι κυκλικές φέτες μικραίνουν όσο ανεβαίνουμε προς την κορυφή του κώνου. Στην κορυφή η κυκλική φέτα (δίσκος) εκφυλίζεται σε ένα σημείο (κορυφή κώνου)

Ο κυκλικός δίσκος (φέτα) στο ύψος z όπου $z \in [0, \rho]$ έχει εμβαδόν $E(z)$

$$E(z) = \pi r^2$$

όπου r η ακτίνα του κυκλικού δίσκου στο ύψος z.

Προσοχή: για $z=0$ έχουμε $r = \rho$
ενώ για $z=\rho$ '' $r = 0$



Χρησιμοποιούμε ομοιότητα τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ οπότε έχουμε την αναλογία

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\rho - z}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{r = \rho - z}$$

Άρα $E(z) = \pi(\rho - z)^2$ οπότε ο όγκος του κώνου: είναι $\int_0^{\rho} \pi (\rho - z)^2 \, dz$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Ο όγκος}\\ \text{κώνου}\end{array}\right] = \pi\int_0^{\rho} (\rho^2 - 2\rho z + z^2)\,dz =$$

$$= \pi\left\{\int_0^{\rho} \rho^2\,dz - \int_0^{\rho} 2\rho z\,dz + \int_0^{\rho} z^2\,dz\right\}$$

$$= \pi\left\{\rho^2\left[z\right]_0^{\rho} - 2\rho\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho} + \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\rho}\right\}$$

$$= \pi\cdot\left[\rho^3 - \rho^3 + \frac{\rho^3}{3}\right] = \boxed{\pi\frac{\rho^3}{3}}$$

Συνεπώς ο όγκος του κανονικού κυκλικού κώνου ακτίνας ρ & ύψους ρ είναι

$$\boxed{\pi\frac{\rho^3}{3}}$$