Μαθηματικός Λογισμός Ι

(12η Διάλεξη)

[Ολοκλήρωμα]

Μέρος Δ': Βασικές Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

$$\int R(x)\,dx$$

όπου

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_\mu x^\mu + b_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1η περίπτωση: Ο βαθμός πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το βαθμό πολυωνύμου του παρονομαστή ($\nu \geq \mu$)

Τότε
διαιρούμε τα δύο πολυώνυμα που λαμβάνουμε

$$P(x) = Q(x)\cdot \Pi(x) + Y(x)$$

όπου $\deg(Y(x)) < \deg(Q(x))$

και έτσι μεταφερόμαστε στη μεθοδολογία της 2ης περίπτωσης ως εξής:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\cdot\Pi(x) + Y(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \Pi(x)\,dx + \int \frac{Y(x)}{Q(x)}dx$$

$2^η$ περίπτωση: Ο βαθμός πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό πολυωνύμου του παρονομαστή ($\nu < \mu$)

Τότε εκτελούμε τα εξής βήματα

(α) Αναλύουμε το πολυώνυμο του παρονομαστή σε πρωτοβάθμιους & δευτεροβάθμιους παράγοντες.

$$Q(x) = (x-\rho_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-\rho_\lambda)^{m_\lambda} \cdot (x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\gamma_\xi x+\delta_\xi)^{\ell_\xi}$$

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου $Q(x)$ ισούται με μονάδα ($b_\mu = 1$))

Προφανώς $m_1 + \cdots + m_\lambda + 2\left[\ell_1 + \cdots + \ell_\xi\right] = \mu$

Επιπλέον ισχύει $\gamma_i^2 - 4\delta_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, \xi$

(β) Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε απλά κλάσματα της μορφής

- $\dfrac{E_1}{(x-\rho)}, \dfrac{E_2}{(x-\rho)^2}, \ldots, \dfrac{E_n}{(x-\rho)^n}$
- $\dfrac{J_1 x+\Theta_1}{x^2+\gamma x+\delta}, \dfrac{J_2 x+\Theta_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2}, \ldots, \dfrac{J_\ell x+\Theta_\ell}{(x^2+\gamma x+\delta)^\ell}$

γ) Προσδιορίζουμε τα ε's, ζ's και η's και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε δύο τύπους ολοκληρωμάτων

Τύπου 1 → $\boxed{\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\,dx}$ Τύπου 2 και 1 → $\boxed{\int \frac{\zeta x+\theta}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\ell}}\,dx}$

Ολοκλήρωμα τύπου 1.

Τύπου 1 $$\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\,dx = \begin{cases} n=1 \Rightarrow \ln|x-\rho| \\ n>1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-n}(x-\rho)^{1-n} \end{cases}$$

Τύπου 2 $$\int \frac{\zeta x+\theta}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\ell}}\,dx = \frac{\zeta}{\varphi^{2\ell-2}}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^{\ell}} + \frac{2\theta-\zeta\gamma}{2\varphi^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\ell}}$$

$\ell = 1, 2, \ldots$ $\quad t = \dfrac{2x+\gamma}{\varphi}$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{4\delta-\gamma^2}$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής:

1ο = [illegible]

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^\ell} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1+t^2), & \ell=1 \\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\ell}\,(t^2+1)^{1-\ell}, & \ell=2,3,\dots \end{cases}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με τον παρακάτω αναδρομικό τύπο.

Έστω $Z_\ell = \int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell}$ $\quad \ell = 1, 2, \dots$

Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$Z_{\ell+1} = \frac{t}{2\ell(t^2+1)^\ell} + \frac{2\ell-1}{2\ell} Z_\ell \quad \boxed{*}$$

βλέπε πιο κάτω

Έχουμε λοιπόν τους εξής πρώτους όρους

$$Z_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{τοξεφ}\, t$$

$$Z_2 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\, t + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

$$Z_3 = \frac{3}{8}\,\text{τοξεφ}\, t + \frac{3}{8}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$$

1ο Παράδειγμα [με Διαίρεση Πολυωνύμων].

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 5}{(1-x)^2(x+3)}\,dx \qquad \left(\begin{array}{l} (1-x)^2(x+3) = \ldots = \\ = x^3 + x^2 - 5x + 3 \end{array} \right)$$

Έχουμε $\deg(\text{αριθμητή}) = 5 > 3 = \deg(\text{παρονομαστή})$

πρέπει να προχωρήσουμε πρώτα στη διαίρεση πολυωνύμων.

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x + 5 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ \hline
-(x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2) \qquad\qquad & x^2 - x + 5 \\ \cline{1-1}
-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 0x + 5 & \\
-(-x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x) \qquad & \\ \cline{1-1}
5x^3 - 8x^2 + 3x + 5 & \\
-(5x^3 + 5x^2 - 25x + 15) & \\ \cline{1-1}
-13x^2 + 28x - 10 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 - x^3 + 5}{(1-x)^2(x+3)} = \left(x^2 - x + 5\right) + \frac{-13x^2 + 28x - 10}{(1-x)^2(x+3)}$$

οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα αναλύεται στα δύο παρακάτω

$$\int (x^2 - x + 5)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + c_1$$

$\displaystyle\int \frac{13x^2 - 28x + 10}{(1-x)^2 (x+3)}\,dx$ = αναλύουμε το κλάσμα

$$\frac{13x^2 - 28x + 10}{(1-x)^2 (x+3)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{x+3}$$

κάνουμε τα κλάσματα στο δεξιό μέλος ομώνυμα, τα προσθέτουμε και εξισώνουμε τους αριθμητές δηλ.

$$A(1-x)(x+3) + B(x+3) + C(1-x)^2 = 13x^2 - 28x + 10$$

$$A(3 - 2x - x^2) + B(x+3) + C(1 - 2x + x^2) = 13x^2 - 28x + 10$$

$$(C-A)x^2 + (B - 2A - 2C)x + (C + 3B + 3A) = 13x^2 - 28x + 10$$

$$\left.\begin{aligned} C - A &= 13 \\ B - 2A - 2C &= -28 \\ C + 3B + 3A &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{λύνω το σύστημα} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \ldots \\ B &= \ldots \\ C &= \ldots \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 5}{(1-x)^2 (x+3)}\, dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + A\ln|1-x| - B\frac{1}{1-x} + C\ln|x+3| + C_2$$

Παράδειγμα: Να υπολογισεί το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\, dx$$

Υπόδειξη: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+10}\, dx = \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1}\, dx$

Θέτω $y = x - 3$ οπότε $dy = dx$ οπότε

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \text{τοξεφ}\, y + c$$ ή αντιστοιχα

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\, dx = \text{τοξεφ}(x-3) + C$$

$\boxed{*}$ Υπολογισμός ολοκληρώματος $\int \frac{1}{(1+t^2)^\ell} dt$

Για $\ell = 1$ έχουμε

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \tau o \xi \varepsilon \varphi\, t.$$

Για $\ell = 2$ έχουμε

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int t \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= \tau o\xi\varepsilon\varphi\, t - \int t \left(-\frac{1}{2(1+t^2)}\right)' dt =$$

$$= \tau o\xi\varepsilon\varphi\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \int (t)' \frac{1}{2(1+t^2)} dt$$

$$= \tau o\xi\varepsilon\varphi\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \tau o\xi\varepsilon\varphi\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t =$$

$$= \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t + \frac{t}{2(1+t^2)}$$

Και επαγωγικά κάνοντας διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις μπορούμε να επαληθεύσουμε τον αναδρομικό τύπο

$$\boxed{Z_{l+1} = \frac{t}{2l(1+t^2)^l} + \frac{2l-1}{2l} Z_l}$$

$$\frac{5x^3+7x-1}{(x+3)^4(x-1)^2(x^2+x+1)^3} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{(x+3)^3} + \frac{A_4}{(x+3)^4}$$

$$+ \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{C_3x+D_3}{(x^2+x+1)^3}$$