Μαθηματικός Λογισμός Ι

10η Διάλεξη

(Ολοκληρώματα).

Μέρος Β': Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Βασικές τεχνικές

1. Μέθοδος Αντικατάστασης.
2. Παραγοντική Ολοκλήρωση
3. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων (ανάλυση σε απλά κλάσματα).

Μέθοδος Αντικατάστασης.

Γενικά, σε αυτή τη μέθοδο αντικαθιστούμε (αλλάζουμε) τη μεταβλητή ολοκλήρωσης ώστε να μας προκύψει μια πιο απλή συνάρτηση την οποία μπορούμε να ολοκληρώσουμε εύκολα.

Μπορεί η πρώτη αντικατάσταση (αλλαγή) να είναι αρκετή ή μπορεί να χρειάζονται περαιτέρω μετασχηματισμοί

Βασικά Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

① $\boxed{\int e^{\eta\mu x}\cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx}$ $\underset{\substack{dy=(\eta\mu x)'dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dy=\sigma\upsilon\nu x\, dx}}{\overset{y=\eta\mu x}{=\!=}}$ $\int e^y dy = e^y \overset{y=\eta\mu x}{=\!=} \boxed{e^{\eta\mu x}} + c$

② $\boxed{\int e^x \cdot \varepsilon\varphi(e^x)\, dx}$ $\underset{\substack{dy=(e^x)'dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dy=e^x dx}}{\overset{y=e^x}{=\!=}}$ $\int \varepsilon\varphi y\, dy = -\ln|\sigma\upsilon\nu y| \overset{y=e^x}{=\!=} \boxed{-\ln|\sigma\upsilon\nu(e^x)|} + c$

Χρησιμοποιώ $\int \varepsilon\varphi x\, dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x|$

③ $\boxed{-\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx}$ $\underset{\substack{dy=(\sigma\upsilon\nu x)'dx \\ \Rightarrow dy=-\eta\mu x\, dx}}{\overset{y=\sigma\upsilon\nu x}{=\!=}}$ $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4} \overset{y=\sigma\upsilon\nu x}{=\!=} \boxed{\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^4 x} + c$

Σύνθετα Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

(1) $\boxed{\int (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 dx} = \int (\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x)dx =$

$= \int (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)dx - 2\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx =$

$= \int 1\, dx - 2\int \eta\mu x\,(\eta\mu x)' dx \underset{dy = (\eta\mu x)' dx}{\overset{y = \eta\mu x}{=\!=}}$

$= x - 2\int y\, dy = x - \int 2y\, dy =$

$= x - y^2 \overset{y=\eta\mu x}{=\!=} \boxed{x - \eta\mu^2 x} + c$

---

(2) $\boxed{\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx} \underset{\mu\varepsilon\ e^x}{\overset{\pi o\lambda\lambda/\omega}{=\!=}} \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx =$

αριθμητή & παρονομαστή

$\underset{dy = e^x dx}{\overset{y = e^x}{=\!=}} \int \frac{dy}{1+y^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi y + c \overset{y=e^x}{=\!=}$

$= \boxed{\tau o\xi\varepsilon\varphi(e^x) + c}$

(3) $$\boxed{\int \frac{1}{1+e^x}\,dx}$$

$y = e^x \Rightarrow x = \ln y$

$dx = (\ln y)'\,dy$

$dx = \frac{1}{y}\,dy$

$$= \int \frac{1}{1+y}\left(\frac{1}{y}\,dy\right) = \int \frac{1}{y(1+y)}\,dy =$$

(Παρατηρώ ότι $\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$)

$$= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$\overset{*}{=} \ln|y| - \ln|1+y| + C =$$

$$= \ln e^x - \ln(1+e^x) + C =$$

$$= \boxed{x - \ln(1+e^x) + C}$$

(*) $\int \frac{1}{1+y}\,dy$ $\quad z = 1+y$, $dz = dy$ $\quad \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z|$

$$= \ln|1+y| + C$$

Παραγοντική Ολοκλήρωση

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα με συνεχείς παραγώγους τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Σημείωση: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\int (f(x)\cdot g(x))'dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \Rightarrow$$

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Εφαρμογές της παραγοντικής ολοκλήρωσης

1. Απλή παραγοντική ολοκλήρωση
2. Πολλαπλή " " (Διαδοχική)
3. Κυκλική " "

Στοιχειώδες παράδειγμα.

$$\boxed{\int x \cdot e^x \, dx} = \int x \cdot (e^x)' \, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int (x)' e^x \, dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx$$

$$\boxed{= x e^x - e^x + C}$$