Μαθηματικός Λογισμός Ι

9η Διάλεξη

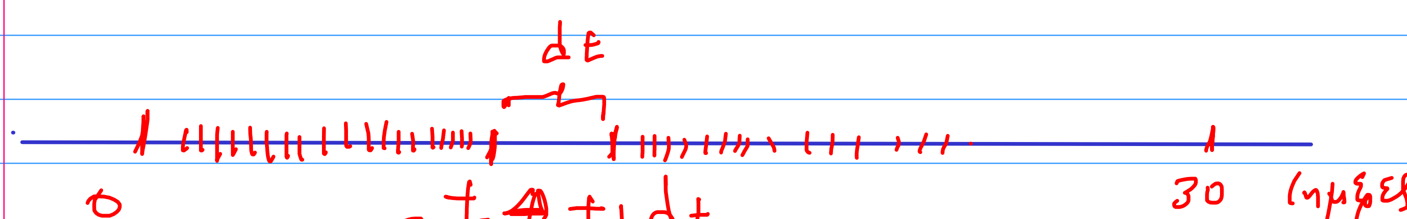
(Ολοκλήρωμα)

Μέρος Α΄: Ορισμοί - Βασικές έννοιες

$\int$ $\qquad \sum$

	1η μέρες	30ή ημέρα
1η :	1000	
2η	2000	
3η	3000	⋮
⋮	⋮	⋮
8η	8000	
Σύν	21.000	21.000 $\boxed{30 \times 21000}$

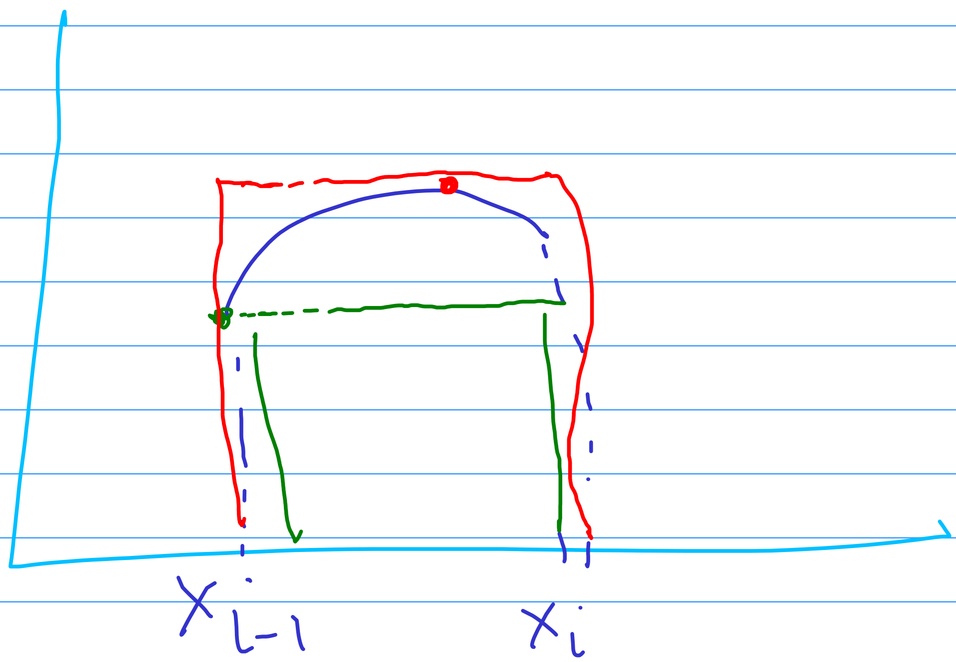
$f(t)$: ρυθμός παραγωγής πλήθος σουβλάκια



$$\int_0^{30} f(t) \cdot dt$$

$\int f(x)\,dx$ αόριστο ολοκλήρωμα

$\int_a^b f(x)\,dx$ ορισμένο ολοκλήρωμα

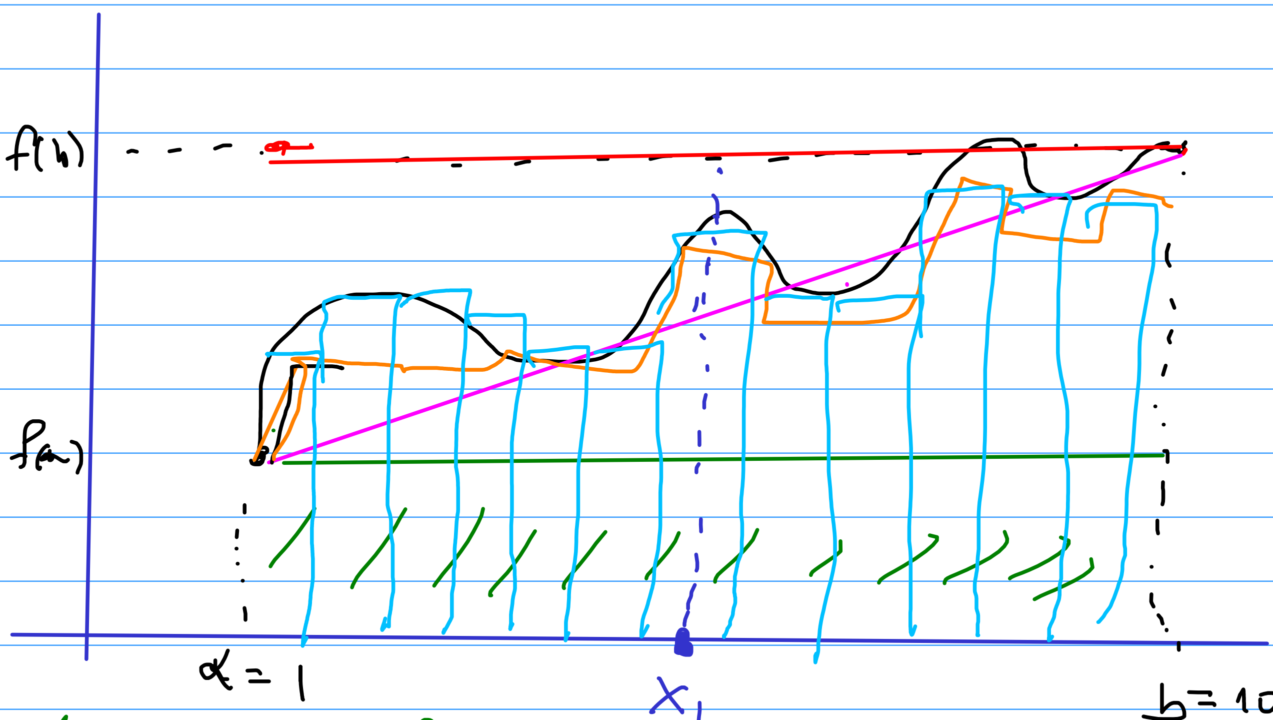


$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$\int (5x^4) dx = x^5 + c$$



Εμβαδον $= f(\alpha)\cdot(b-\alpha) = 9f(\alpha)$

Εμβαδυ $= f(b)(b-\alpha) = 9f(b)$

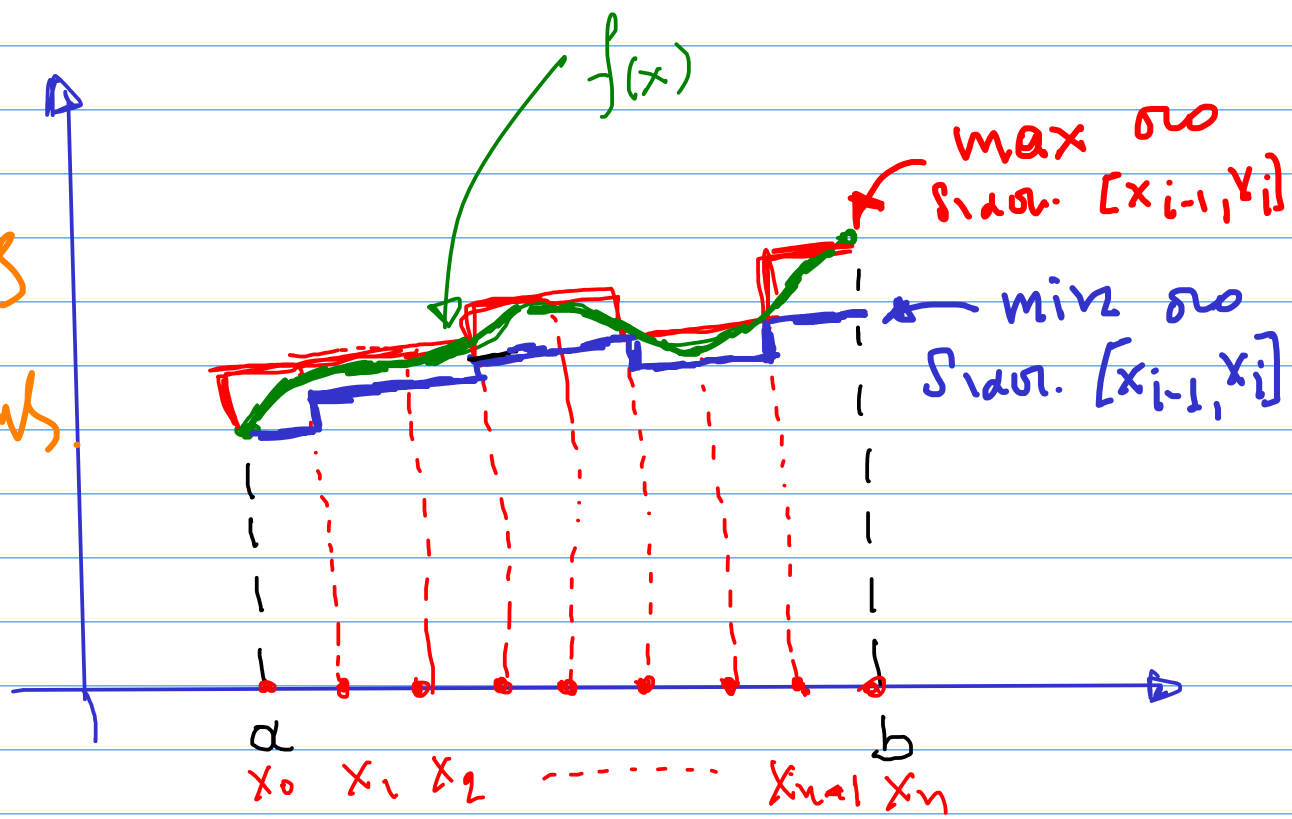
> Γενικά η ολοκλήρωση είναι η "αντίθετη" πράξη της παραγώγισης

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "\text{παραγώγιση}"] & f' \arrow[l, bend left, "\text{ολοκλήρωση}"] \end{tikzcd}$$

> $\boxed{\text{Ορισμένο ολοκλήρωμα } \int_a^b f(x)\,dx}$

Έστω θετική συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$

Μέθοδος εξάντλησης



Μέθοδος εξάντλησης.

E = Εμβαδόν που περιέχεται κάτω από την καμπύλη f(x) και μέχρι τον άξονα x'x.

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

ορίζω $f_i^{min} = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$f_i^{max} = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

τότε έχουμε την εξής ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{min} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq E \leq \sum_{i=1}^{n} f_i^{max} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Εάν υποθέσουμε ότι τα διαστήματα

$[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$ ισομήκη, $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

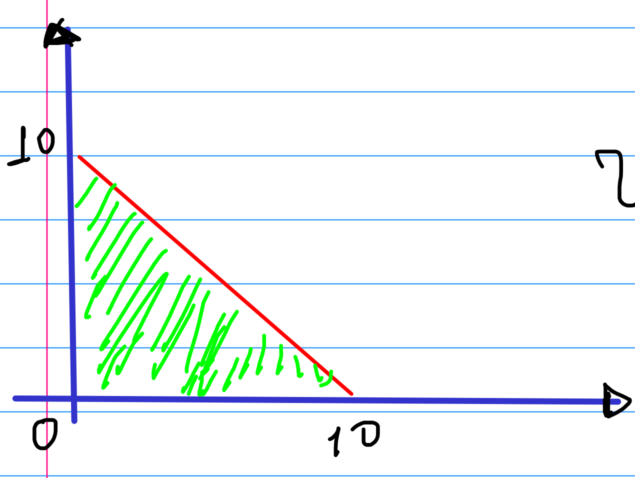
τότε, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^{min} \cdot \Delta x \leq E \leq \sum_{i=1}^{n} f_i^{max} \cdot \Delta x$

Τότε λαμβάνονται τα όρια της παραπάνω ανισότητας για $n \to +\infty$ και έχουμε τα δύο αθροίσματα συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$. Αυτό ορίζεται ως το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[\alpha, b]$

$$E = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^{min} \Delta x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^{max} \Delta x$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f(x) = 10 - x$, $0 \le x \le 10$

Να υπολογίσετε το $\int_0^{10} f(x)\,dx$



Το $\int_0^{10} f(x)\,dx$ είναι το εμβαδό του τριγώνου Sω).

$$\int_0^{10} (10 - x)\,dx = \frac{1}{2}\, 10 \cdot 10 = 50.$$

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Εστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ τότε

① $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$

② $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$

③ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\alpha \le c \le b$

④ $\mu\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-\alpha)$

όπου $\mu \le f(x) \le M$ για κάθε $x\in[\alpha, b]$

Σημειώσεις:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b 0\,dx = 0.$$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι $2 \le \int_{-1}^{1} e^{x^2} \le 2e$

Υπόδειξη: Αρκεί $1 \le e^{x^2} \le e$ για κάθε $x\in[-1,1]$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι μια νέα συνάρτηση $g(x)$ όπου ισχύει $g'(x) = f(x)$

Τότε λέμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι η $g(x) + C$

Θεώρημα: Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτ. Τότε η $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε x.

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

Πόρισμα: f συνεχής σε κάποιο διάστημα τότε υπάρχει το αόριστο ολοκλήρωμα της f

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$

και ισχύει ότι $\int f(x)\,dx = g(x) + C$

τότε $$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Αόριστα Ολοκληρώματα Βασικών Συναρτήσεων

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$
3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
5. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
6. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{τοξεφ}x + c$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{τοξημ}x + c$

Παραδείγματα

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \, dx$ (β) $\int_0^1 (e^x + 10x)\, dx$

Λύσεις

(α) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \, dx = \left[\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$

$= \eta\mu\pi - \eta\mu\frac{\pi}{4} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(β) $\int_0^1 (e^x + 10x)\, dx = \int_0^1 e^x \, dx + \int_0^1 10x\, dx =$

$= \left[e^x\right]_0^1 + 10 \cdot \int_0^1 x\, dx =$

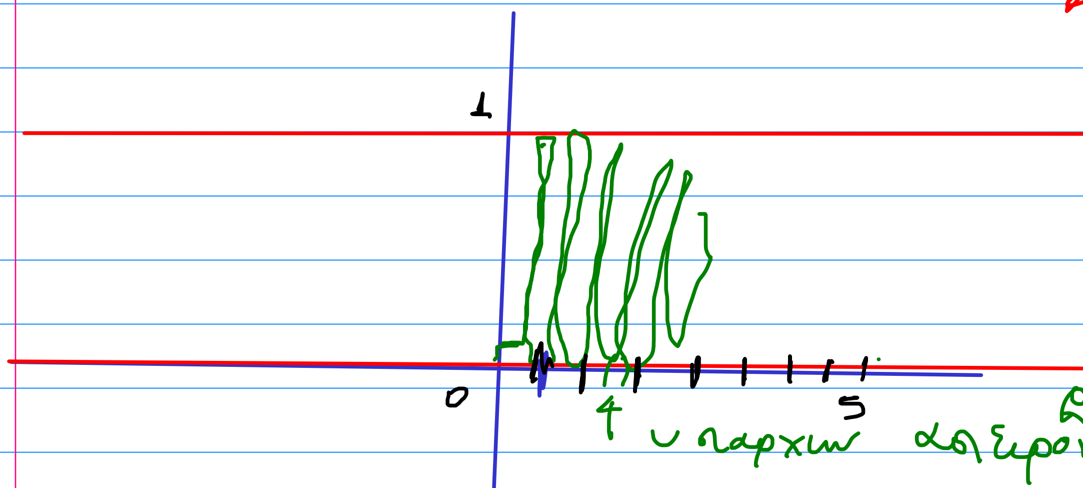
$= \left[e^x\right]_0^1 + 10\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= (e - 1) + 10\left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2}\right) =$

$= e - 1 + 5 = e + 4.$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο.



υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \text{ΔΕΝ υπάρχει (Riemann ολοκλ.)}$$

$$= 5 \quad \text{(Lebesgue ολοκλ.)}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 5 \qquad \int_0^5 g(x)\,dx = 0$$

(Lebesgue) (Lebesgue)

ΔΕΝ υπάρχουν Riemann ολοκληρώματα για $f(x)$ ή $g(x)$