Μαθηματικοί Λογισμοί Ι

7η Διάλεξη.

[Παράγωγοι]

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,b)$ τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 εάν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

και το όριο λέγεται παράγωγος της f στο σημείο x_0.

Σημειώσεις ① Εάν υπάρχει το όριο για

- $x\to x_0^+$ τότε f έχει δεξιά παράγωγο
- $x\to x_0^-$ " f " αριστερή "

② Εάν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει παράγωγο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

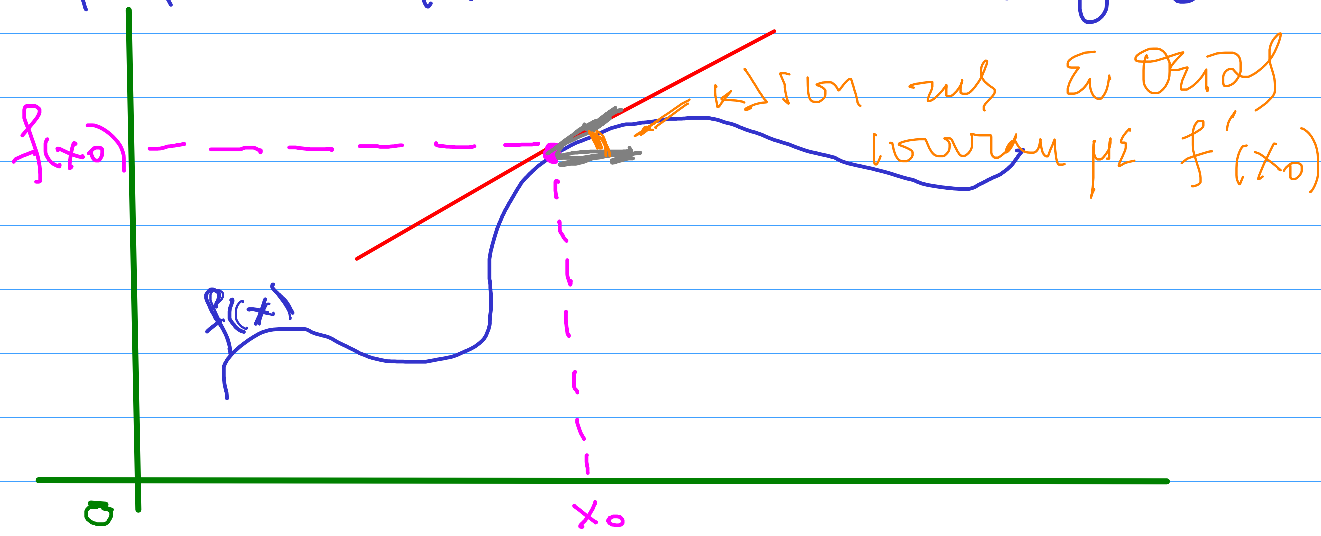
Πρόταση: $\left[f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0\right] \Rightarrow \left[f \text{ συνεχής στο } x_0\right]$

ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Είναι συνεχής στο 0
ΔΕΝ είναι παραγωγ.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.



• Φυσική ερμηνεία παραγώγου = ταχύτητα

Πράξεις με παραγώγους.

① $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

② $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

③ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

④ $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

⑤ $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ $\quad y_0 = f(x_0)$

$$(f\circ g\circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0)))\cdot g'(h(x_0))\cdot h'(x_0)$$

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων.

1. $(c)' = 0$
2. $(x^{n})' = n\cdot x^{n-1}$
3. $(e^{x})' = e^{x}$
4. $(a^{x})' = a^{x}\cdot \ln a$ $\quad (a^{x})' = (e^{x\ln\alpha})' = e^{x\ln\alpha}\cdot(x\ln\alpha)' = \alpha^{x}\cdot\ln\alpha$
5. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
6. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
7. $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$
8. $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^{2}x}$
9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
10. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$
12. $(\tau o\xi\eta\mu x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

Παράδειγμα (1) Να βρεθεί την παράγωγο της $y = f(x) = \text{τοξεφ}x$

Λύση: $y = \text{τοξεφ}x \Rightarrow x = \text{εφ}y \; (*)$ από τον κανόνα αντίστρ.

$$(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\text{συν}^2 y}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} \overset{(**)}{=} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\eta\mu^2 y + \sigma\upsilon\nu^2 y = 1 \xrightarrow[\mu\epsilon\ \sigma\upsilon\nu^2 y]{\text{διαιρώ}} \text{εφ}^2 y + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y} \; (**)$$

(2) Να βρεθεί την παράγωγο της $y = f(x) = \text{τοξημ}x$

Λύση: $y = \text{τοξημ}x \Rightarrow x = \eta\mu y \; (*)$ οπότε

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu y} \overset{(**)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2 y}} \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\eta\mu^2 y + \sigma\upsilon\nu^2 y = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1-\eta\mu^2 y} \; (**)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Γενικά πρέπει να εξέγχουμε την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα [Μέσης Τιμής] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b)

Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

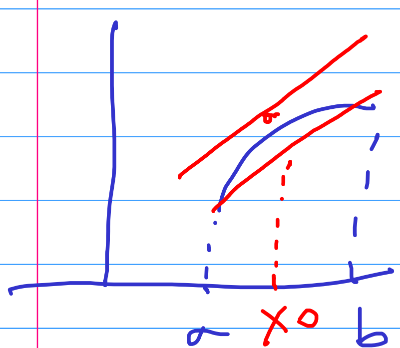
✗ Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος!

Θεώρημα [Rolle]· Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a,b)
- $f(a)=f(b)$

Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=0$

Σημείωση: Τα δύο παραπάνω Θεωρήματα είναι ισοδύναμα!



Βασικές Προτάσεις Παραγώγων

① $f' = g' \Rightarrow f(x) = g(x) + C$

② f αύξουσα στο $(\alpha, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ στο (α, b)
(φθίνουσα) $(\leq)$

③ $\left[f \text{ έχει τοπικό ακρότατο στο } x_0 \right] \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (Θεώρημα Fermat)

γεωμετρική ερμηνεία

④ Διερεύνηση ακροτάτων.

✓ ακραίες τιμές του πεδίου ορισμού

✓ σημεία που δεν ορίζεται η συνάρτηση

✓ σημεία όπου $f'(x_0) = 0$

(για να είναι μέγιστο πρέπει $f''(x_0) < 0$

" " " ελάχιστο " $f''(x_0) > 0$

Σημείωση (A) Εάν $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ (σημείο καμπής).

(B) Εάν $f''(x_0) > 0$ τότε κυρτή συνάρτηση

" $f''(x_0) < 0$ " κοίλη "

[ΚΥΡΤΟ ΣΥΝΟΛΟ, ορισμός ?]

(5) Ασύμπτωτες του γραφήματος μιας συνάρτησης $y = f(x)$.

(i) Εάν $\lim_{x \to x_0^+} f(x_0) = +\infty$ ή $-\infty$

ή $\lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = +\infty$ ή $-\infty$

τότε η $x = x_0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

(ii) Εάν έχουμε ότι. (για $a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - a x \right) = b$$

τότε $y = ax + b$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

(ομοίως ισχύει και για το $x = -\infty$)

(6) Κανόνας L'Hospital Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x_0) = 0$ ($\pm\infty$)

τότε $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Εφόσον υπάρχει το όριο στο δεξιό μέλος).

παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$

7) Ανάπτυγμα Taylor

Έστω συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in D$ και f $(n+1)$ φορές παραγωγίσιμη στο D

Τότε για κάθε $x \in D$ μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots + f^{(\nu)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} + f^{(\nu+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-x_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

όπου ξ βρίσκεται μεταξύ των σημείων x_0 και x.

Σημείωση ① Για $n=0$ έχουμε τον την

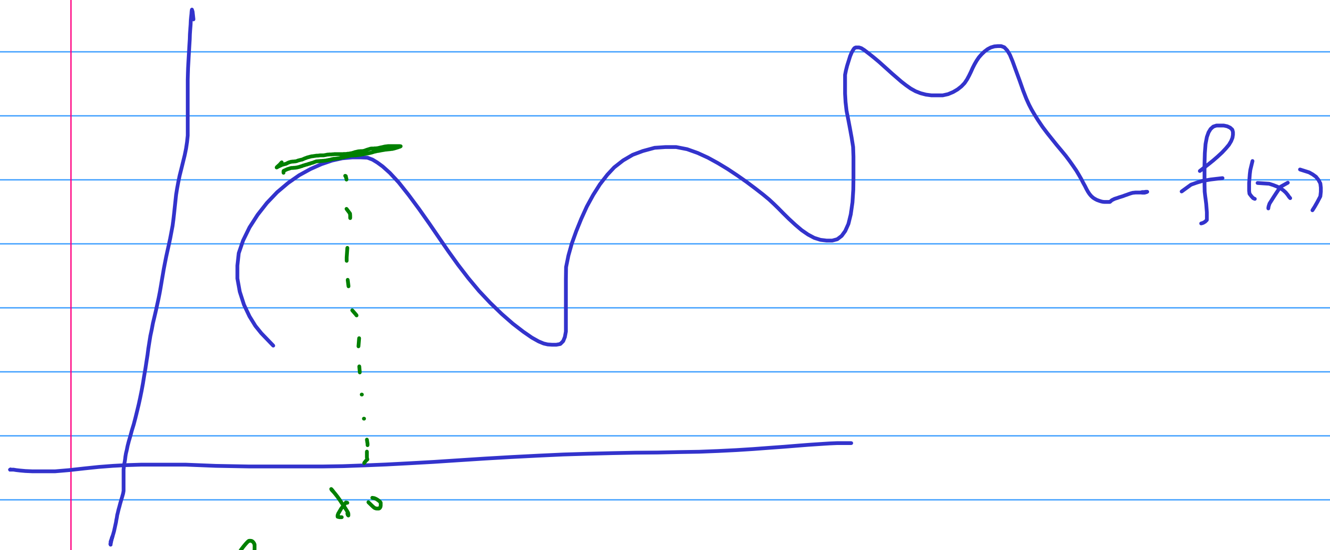
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

8) Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Έστω $F(x,y)=0$ πεπλεγμένη συνάρτηση..

τότε $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$f(x) = \left[\ln\left(e^{x^2} + \sigma\upsilon\nu x^3\right)\right]^{\varepsilon\varphi x}$$



$f_1(x) = 5 + 6x$ κοντά σε κάποιο $x_0 = 3$

$f_2(x) = 3 + 2x + 5x^2$ " " " "

$f_3(x) = 1 + 6x - 2x^2 + 4x^3$ " " "

f_1 (2,9 , 3,1)

f_2 (2,99 , 3,01)

f_3 (2,7 , 3,3)

Μπλεγμένες = Πεπλεγμένες

$$x+y-6=0 \Rightarrow y = 6-x$$

$$y = f(x)$$

$$x^3y-7x^2y^6+6x-5y\ln x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cdots ? \qquad y = f(x)$$

$d \leftrightarrow \partial$

ολική παράγωγος — μερική παράγωγος

$$F(x,y) = x^3y^7+6x^5y^3+xy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(x^3y^7+6x^5y^3+xy\right)' =$$

$$= \left(x^3y^7\right)' + \left(6x^5y^3\right)' + (xy)' =$$

$$= 3x^2y^7 + 6y^3\,5x^4 + y$$

$$= 3x^2y^7 + 30y^3x^4 + y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 7x^3y^6 + 18x^5y^2 + x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^7 + 30\cancel{x^3}x^4 + y}{7x^3y^6 + 18x^5y^2 + x}$$

$$F(x,y) = x^3y^7 + 6x^5y^3 + xy = 0$$

$$(x^3y^7 + 6x^5y^3 + xy)' = 0' \Rightarrow$$

$$(x^3y^7)' + (6x^5y^3)' + (xy)' = 0$$

$$(x^3)'y^7 + x^3(y^7)' + (6x^5)'y^3 + 6x^5(y^3)' + xy' + x'y = 0$$

$$3x^2y^7 + x^3\,7y^6y' + 30x^4y^3 + 6x^5\,3y^2y' + xy' + y = 0$$

$$\Rightarrow y' = \underline{\qquad\qquad\qquad} \checkmark$$