Μαθηματικός Λογισμός Ι

(5η Διάλεξη)

Ασκήσεις (Συναρτήσεις - Ακολουθίες)

1) Να υπολογισθεί το παρακάτω όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Λύση: Γενικά ένας εύκολος σχετικά τρόπος υπολογισμού του ορίου μιας ακολουθίας είναι να βρίσκουμε το όριο της αντίστοιχης συνάρτησης δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να βρούμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} =$$

όμως $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{απροσδιοριστία}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Άρα τελικά $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = e^0 = 1$.

Προσοχή! Εάν η αντίστοιχη συνάρτηση συγκλίνει τότε και η ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ!

2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

<u>Λύση</u>: Όπως προηγουμένως στην άσκηση 1 θα υπολογίσουμε το όριο της αντίστοιχης συνάρτησης $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε πάλι απροσδιοριστία

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$ άρα

και $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

3) Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left[1+\frac{1}{2n!}\right]^{n!}$$

Λύση: Θεωρούμε αρχικά την ακολουθία b_n,

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

όπως είδαμε στην άσκηση (2) $\lim_{n\to\infty} b_n = e$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία γ_n

όπου $\gamma_n = \left(1+\frac{1}{2n!}\right)^{2n!}$

και παρατηρώ ότι η γ_n είναι υπακολουθία της b_n

άρα θα συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ. $\gamma_n \to e$

Τέλος, παρατηρώ ότι

$$a_n = \sqrt{\gamma_n}$$

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\gamma_n} = \sqrt{e}$

4) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}$$

Λύση: Παρατηρώ ότι η α_ν φράσσεται άνω και κάτω (δεξιά & αριστερά) από μηδενικές ακολουθίες β_ν και γ_ν. όπου $\beta_\nu = 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\gamma_\nu = \frac{1}{\nu} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Πράγματι,

$$\beta_\nu = 0 < \alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu}{\nu \cdot \nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu} =$$

$$= \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2}{\nu} \cdot \frac{3}{\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\nu} <$$

$$< \frac{1}{\nu} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\nu} = \gamma_\nu .$$

5) Να εξετάσετε εάν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Λύση: Η a_n δεν συγκλίνει!

Θα δείξω ότι η a_n ΔΕΝ είναι "Cauchy" άρα δεν θα συγκλίνει (αφού έχουμε πει ότι οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{R}$)

Εξετάζω την παρακάτω διαφορά:

$$|a_{2n} - a_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \right| = \left| n \cdot \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2}$

άρα ΔΕΝ είναι Cauchy $\Rightarrow$ ΔΕΝ συγκλίνει

6) Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο:

$a_1 \in (0,1)$ και $a_{n+1} = 1-\sqrt{1-a_n}$ $\quad n=1,2,3,\dots$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Λύση. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι η a_n συγκλίνει! Σύμφωνα με το σχετικό θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι η a_n είναι μονότονη + φραγμένη.

$\boxed{\text{(α) Μονότονη}}$: Με βάση τον ορισμό η a_n είναι φθίνουσα εάν και μόνο αν $a_{n+1} \le a_n \;\; \forall n\in\mathbb{N}$

Θα το δείξουμε επαγωγικά δηλαδή

Για $n=1$ θα δείξω ότι $a_2 \le a_1$.

$1-\sqrt{1-a_1} \le a_1 \Leftrightarrow \sqrt{1-a_1} \ge 1-a_1$ ισχύει

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού το $1-a_1 < 1$ ($a_1 \in (0,1)$).

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα για $n=k$ (δηλ) $a_{k+1} \le a_k$. Θα δείξω ότι ισχύει

και για $n=k+1$ (δηλ) $a_{k+2} \le a_{k+1}$

Πράγματι αφού $a_{k+2} = 1-\sqrt{1-a_{k+1}}$ έχουμε

$$1-\sqrt{1-a_{k+1}} \le a_{k+1} \Rightarrow \sqrt{1-a_{k+1}} \le 1-a_{k+1}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει εφόσον

$1-a_{k+1} < 1$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι $1-a_n < 1$ για κάθε n

(β) Φραγμένη. Δείχνουμε επαγωγικά

ότι $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς η a_n συγκλίνει. Έστω $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda$

Τότε ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 1-\sqrt{1-\lim\limits_{n\to\infty} a_n} \Rightarrow$

$$\lambda = 1-\sqrt{1-\lambda} \Rightarrow \sqrt{1-\lambda} = 1-\lambda \Rightarrow$$

$$(\sqrt{1-\lambda})^2 = (1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$1-\lambda = 1-2\lambda+\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow$$

$\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

Η ρίζα $\lambda = 1$ απορρίπτεται γιατί η ακολουθία α_n είναι φθίνουσα (έχουμε $\alpha_1 < 1$ άρα δεν μπορεί να "κινείται" προς το 1).

Συνεπώς αποδεχόμαστε το $\lambda = 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

7) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Να διερευνήσετε εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

Λύση: Θα δείξουμε ότι ΔΕΝ υπάρχει το

συγκεκριμένο όριο!

Θεωρούμε τις δυο ακολουθίες a_n και b_n

όπου $a_n = \frac{1}{n\pi}$ και $b_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$

Παρατηρούμε ότι

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{και} \quad b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \sin\limits_{n \to \infty}(n\pi) = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = \sin\limits_{n \to \infty}\left[(2n+\tfrac{1}{2})\pi\right] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ΔΕΝ συγκλίνει.}$$