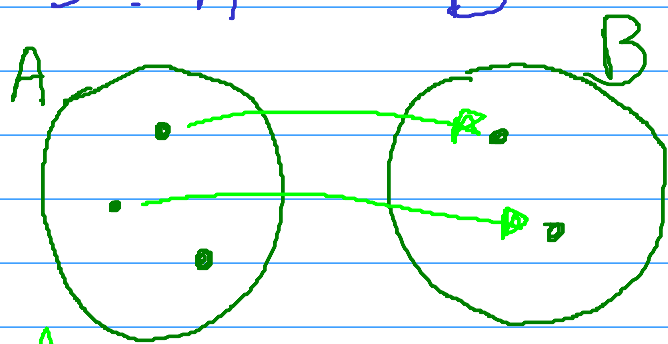
Μαθηματικός Λογισμός Ι

(4η Διάλεξη)

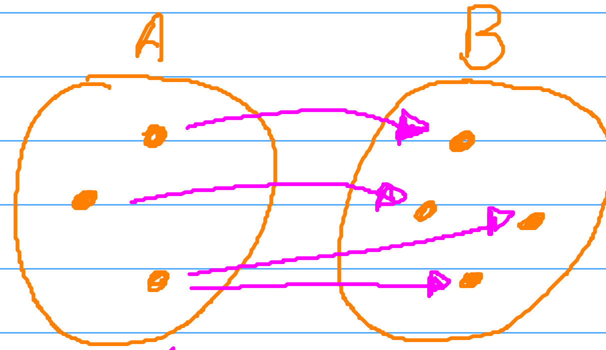
Συναρτήσεις

- Ορισμός της έννοιας της συνάρτησης f

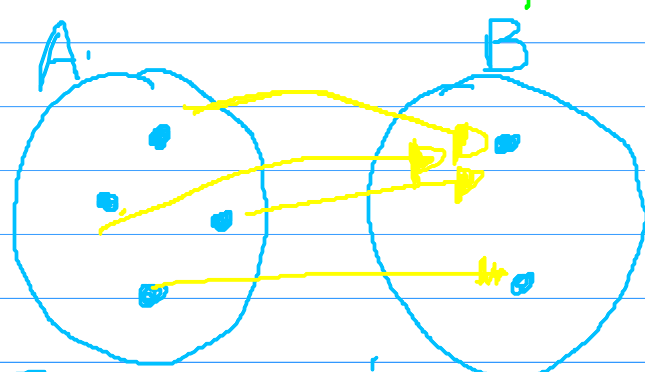
$f: A \to B$



ΔΕΝ είναι συνάρτηση

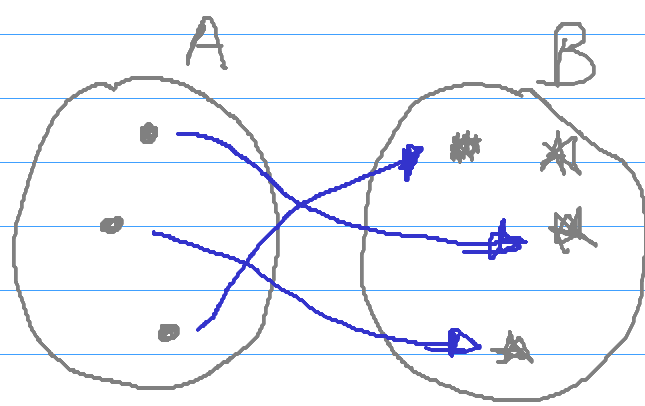


ΔΕΝ είναι συνάρτηση



Είναι συνάρτηση

Επί δηλ. $f(A) = B$



Είναι συνάρτηση 1-1 δηλαδή

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ή

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Πράξεις συναρτήσεων

σύνθεση

$f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $f:g$ (ή $\frac{f}{g}$), $f \circ g$

Άσκηση: Έστω οι συναρτήσεις f, g όπου.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 2 \\ 3, & x<2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε άθροισμα, διαφορά, γινόμενο πηλίκο και σύνθεση των f και g.

<u>Υπόδειξη</u>:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+2, & 2\leq x \\ 4, & 0\leq x<2 \\ 2, & x<0 \end{cases}$$

- Γενικά ΔΕΝ ισχύει $f\circ g = g\circ f$ $(f\circ g \neq g\circ f)$
  συνήθως διαφέρουν

Ενώ ισχύει $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.

- Μονότονες συναρτήσεις (αύξουσα, φθίνουσα)

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

- Φραγμένες συναρτήσεις (άνω, κάτω).

- Συναρτήσεις: Πολυωνυμικές, Ρητές, Τριγωνομετρ.

$$P(x) \quad , \quad R(x) \quad , \quad T(x)$$

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$$

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $T(x) =$ (περιέχει τριγωνομετρ. συναρτήσεις)

- f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f.

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) > 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f^3(x) - 3f(x) - x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Να διερευνήσετε την μονοτονία της.

<u>Υπόδειξη</u>: Εξετάζω τον λόγο $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{[f_1^3(x) - 3f(x_1)] - [f_2^3(x) - 3f(x_2)]} = \ldots$$

$$= \frac{1}{f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3} > 0 \to f \uparrow$$

Ακολουθίες Πραγματικών αριθμών

- Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$. Συνήθως συμβολίζεται με τα γράμματα α, β, γ.

  $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \longrightarrow a(n) \equiv a_n \in \mathbb{R}$.

- Ορισμός: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Longleftrightarrow$ $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ φραγμένο

- Ορισμός: Έστω ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε η b_n θα λέγεται υπακολουθία της a_n εάν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών k_n τέτοια ώστε $a_{k_n} = b_n$

- Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

- Παρατήρηση: Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο ℓ.

Πρόταση!

- Κάθε φραγμένη και μονότονη ακολουθία Είναι συγκλίνουσα ακολουθία

Ορισμός!

Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$: για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Θεώρημα! $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy

• Όρια Συναρτήσεων - στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon)$ συνεπάγεται ότι $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

• Ανάλογα μπορούν να οριστούν τα παρακάτω όρια

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

• Ορισμός πλευρικών ορίων (δεξιά, αριστερά)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Η ύπαρξη και ισότητα των πλευρικών ορίων ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ορίου.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

• Καταγράφουμε το παρακάτω βασικό θεώρημα που συνήθως λειτουργεί ως "αντικριτήριο" σύγκλισης!

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Για } \underline{\underline{\text{κάθε}}} \text{ ακολουθία } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{όπου } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ ισχύει} \\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell \end{array} \right.$$

το θεώρημα ισχύει γενικά για $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και για $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

αναδρομικός τύπος
για ακολουθίες

π.χ $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$, $a_0 = 1$

Παράδειγμα:

Δίνεται ο παρακάτω αναδρομικός τύπος

$a_{n+1} = a_n + 7$, $a_3 = 1$

Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της ακολουθίας.

Λύση Για να ξεκινήσουμε και να "μαντέψουμε" τον αναλυτικό τύπο γράφουμε μερικούς πρώτους όρους της ακολουθίας

$a_3 = 1 \qquad\qquad = (3-3)\cdot 7+1$

$a_4 = a_3+7 = 1+7 = 8 = (4-3)\cdot 7+1$

$a_5 = a_4+7 = 8+7 = 15 = (5-3)\cdot 7+1$

$a_6 = a_5+7 = 15+7 = 22 = (6-3)7+1$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

άρα ο γενικός κανονικός τύπος είναι

$$a_n = (n-3)\cdot 7+1 \quad , \quad n \geq 3 \qquad (*)$$

Για να ολοκληρώσουμε με ορθό μαθηματικό τρόπο θα πρέπει να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο με μαθηματική επαγωγή

ΕΠΑΓΩΓΗ

Βήμα 1ο Ελέγχουμε την ορθότητα της σχέσης (*) για $n = 3$ και παρατηρούμε ότι ισχύει

Πράγματι $a_3 = (3-3)\cdot 7+1 = 0+1 = 1$ (ισχύει).

Βήμα 2ο Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n=k$ δηλ. ισχύει ο τύπος ως εξής

$$a_k = (k-3)\cdot 7 + 1 \quad (**)$$

Βήμα 3ο Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει και για $n=k+1$ δηλ. $a_{k+1}=(k+1-3)7+1$

Από την γενική αναδρομική έχουμε

$$a_{k+1} = a_k + 7 \quad \text{(χρησιμοποιώ την } (**)\text{)}$$

$$= \left[(k-3)\cdot 7 + 1\right] + 7$$

$$= (k+1-3)\cdot 7 + 1$$

οπότε ισχύει $a_{k+1} = \left[(k+1)-3\right]\cdot 7 + 1$

άρα η σχέση $(*)$ ισχύει γενικά

Τέλος επαγωγής