Μαθηματικός

Λογισμός Ι

(2η Διάλεξη)

Μιγαδικοί Αριθμοί

- Ορίζουμε έναν "φανταστικό" αριθμό i ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\boxed{i^2 = -1}$$

- Ορίζουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ όπου:

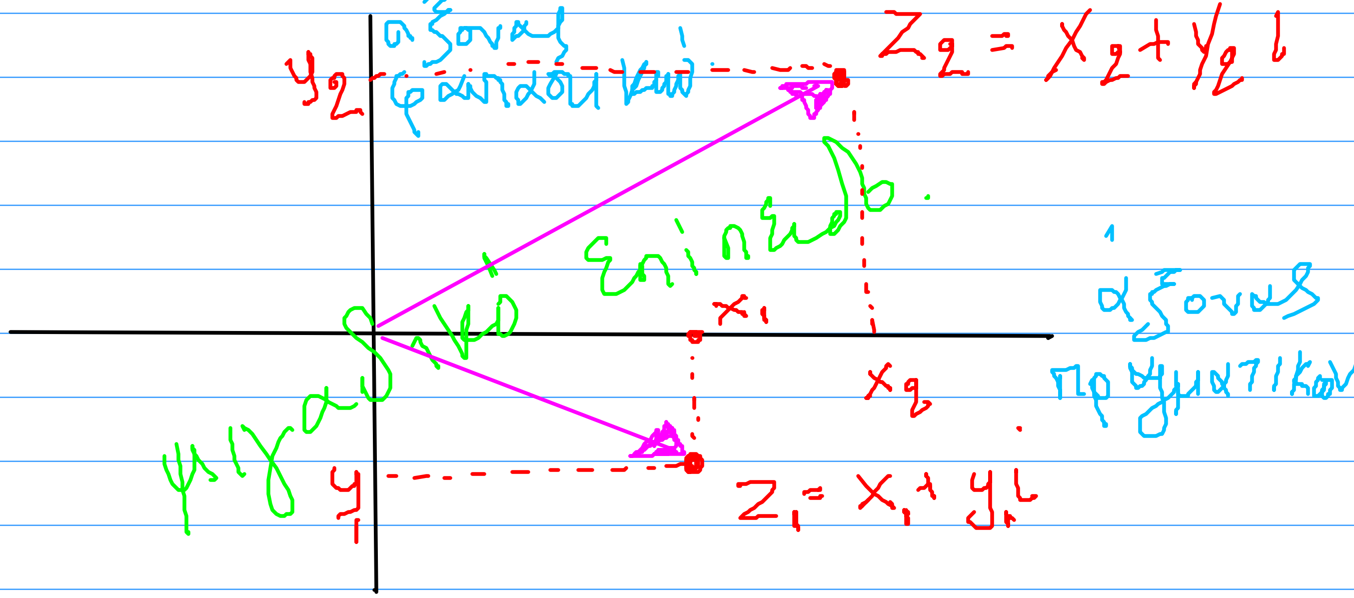
$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Προφανώς $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $(x \in \mathbb{R},\ y = 0)$.

- Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ τότε

$$\underbrace{x = Re(z)}_{\text{πραγματικό μέρος}} \quad \text{και} \quad \underbrace{y = Im(z)}_{\text{φανταστικό μέρος}}$$

- Γεωμετρική Αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών



- Πράξεις στο σύνολο $\mathbb{C}$.

πρόσθεση $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$

αφαίρεση $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$

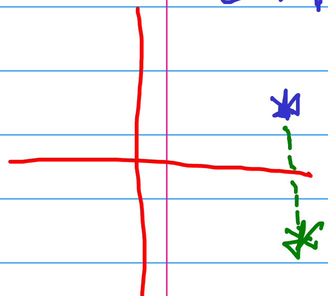
πολλ/σμός $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = \dots$

$\dots = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$

διαίρεση $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)\cdot(x_2 - y_2 i)} =$

$\dots = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$

- συζυγής αριθμός του $z = x + yi$ είναι ο αριθμός $\bar{z}$ όπου:



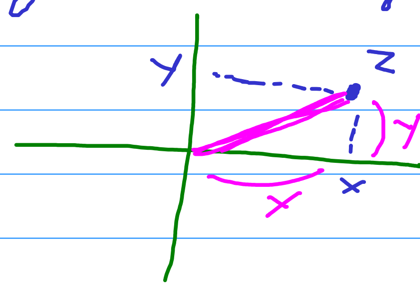
$$\boxed{\bar{z} = x - yi}$$

$\bar{z}$ συμμετρικός ως προς τον $x'x$ (πραγματικό άξονα) του z

- <u>Ορισμός</u>: το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ ορίζεται ως εξής

$|4+3i| = 5$

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$



- Εύκολα αποδεικνύεται ότι $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = (x^2 + y^2) + \cancel{(xy - xy)}^{\,0}\, i$$

$$= x^2 + y^2 = \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]^2 = |z|^2$$

- $z = x + yi$ καρτεσιανή μορφή

$z = \rho[\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta]$ πολική μορφή (τριγωνομετρική μορφή).

οι δύο παραπάνω μορφές του z είναι ισοδύναμες $z \longleftrightarrow z$

$\left(\begin{array}{c} \text{Γνωστό} \\ z = x + yi \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Υπολογίζουμε}} \left[\begin{array}{l} \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tau o \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) \end{array} \right]$

$\left(\begin{array}{c} \text{Γνωστό} \\ z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Υπολογίζ.}} \left[\begin{array}{l} x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = \rho\,\eta\mu\theta \\ z = x + yi \end{array} \right]$

(βλέπε παράδειγμα στο τέλος των σημειώσεων)

- Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ τότε η εξίσωση (1)

δεν έχει πραγματικές αλλά μιγαδικές ρίζες.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$$ (προφανώς $-\Delta > 0$)

- Τύπος του De Moivre για τη λύση (εύρεση όλων των μιγαδικών ριζών της εξίσωσης

$$\boxed{z^{\nu} = \alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Γράφω τον μιγαδικό αριθμό α σε τριγωνομετρική μορφή α

$$\alpha = |\alpha|(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)$$

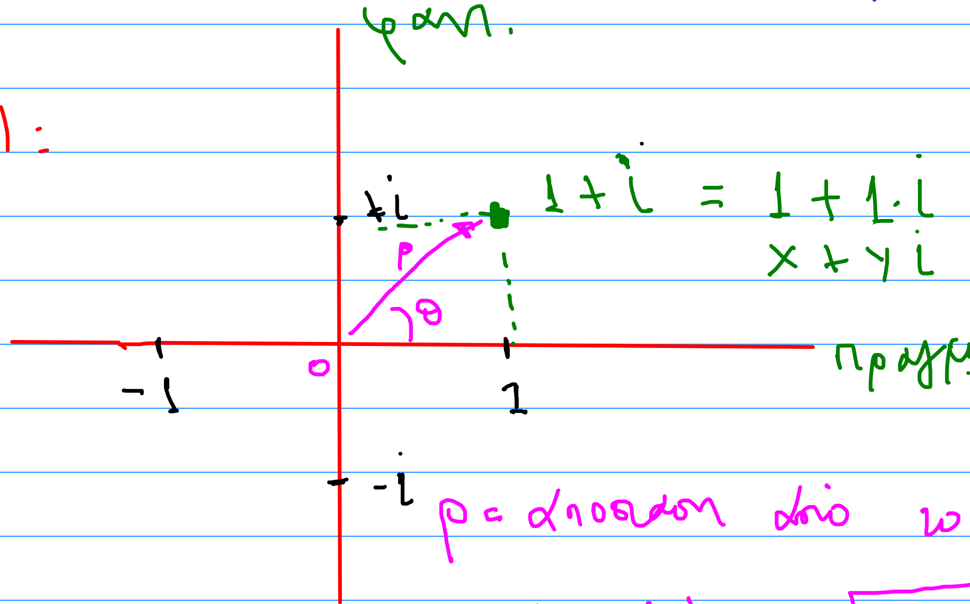
$$\boxed{\begin{gathered} z = \sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right) \\ k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1 \end{gathered}}$$

(βλέπε παράδειγμα στο 28/01 των σημειώσεων)

Παράδειγμα: Έστω $z = 1 + i$

Να βρεθεί την πολική μορφή του z

Λύση:



$1 + i = 1 + 1 \cdot i$

$x + y i$

ρ = απόσταση από το κέντρο O

$\rho = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \text{τοξεφ}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\theta = \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{1}\right) = \text{τοξεφ}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

$$z = \underbrace{1+i}_{\text{Καρτεσ. μορφή}} = \underbrace{\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{πολική μορφή}}$$

Παράδειγμα $x^2 + x + 1 = 0$ να βρεθούν οι ρίζες.

Λύση: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

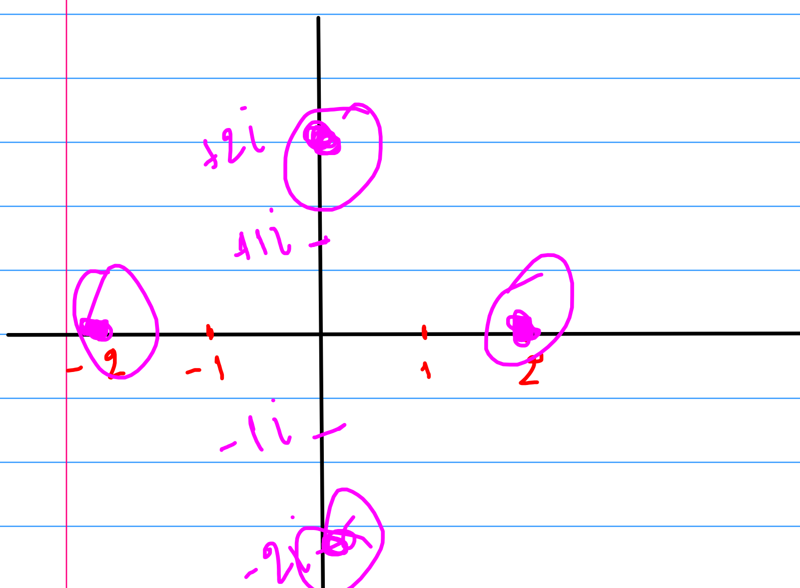
$\boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

Παράδειγμα Να λύσετε την εξίσωση

$$z^4 = 16 \quad (1)$$

Λύση Στους πραγματικούς αριθμούς η (1) έχει δύο ρίζες $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -2$

Γενικά το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης στο $\mathbb{C}$ είναι ίσο με την τάξη του μεγίστου βαθμού όρου.



Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση

$$z^4 = \boxed{4-3i} \Rightarrow \text{τύπος De Moivre}$$