Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχολή Οικονομικών Επιστημών

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης

Σημειώσεις[1] προπαρασκευαστικής διάλεξης στα πλαίσια του φροντιστηρίου του μαθήματος «Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι»

Διδάσκων: Ιωάννης Κοσπεντάρης

Βοηθός Διδασκαλίας: Άγγελος Ράμμος

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

---

[1] Οι σημειώσεις βασίζονται στα συγγράμματα των Teresa Bradley (2015) «Μαθηματικά. Για τα Οικονομικά και τη Διοίκηση», Εκδόσεις Κριτική και Chiang A.C. and Whainwright (2009). «Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης».Εκδόσεις Κριτική

Περιεχόμενα

1.Επίλυση συστημάτων εξισώσεων με τη μέθοδο της απαλοιφής (Method of elimination) 1

2.Επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης (methods of substitution) 3

3.Εκθετικές Συναρτήσεις (Exponential Function) 5

4. Λογαριθμικές Συναρτήσεις 6

5. Έννοια του ορίου 7

Στην παρούσα διάλεξη παρουσιάζονται θέματα που αφορούν:

- την επίλυση συστημάτων εξισώσεων με τις μεθόδους απαλοιφής και αντικατάστασης
- τον αριθμό των λύσεων για ένα σύστημα εξισώσεων
- τις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
- την έννοια του ορίου

1.Επίλυση συστημάτων εξισώσεων με τη μέθοδο της απαλοιφής (Method of elimination)

Άσκηση 1.1

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$2x + 3y = 12.5 \ (1)$$

$$-x + 2y = 6 \quad (2)$$

a. Να επιλυθεί ως προς x και y αλγεβρικά
b. Να επιλυθεί ως προς x και y γραφικά

<u>Λύση</u>

Εάν ένας από τους συντελεστές x και y ήταν ίδιος και στις δύο εξισώσεις, τότε θα προχωρούσαμε σε απαλοιφή και θα είχαμε μια εξίσωση με έναν άγνωστο μόνο.

Βήμα 1

Δεδομένου ότι οι συντελεστές x και y είναι διαφορετικοί, θα πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές μια εξίσωσης με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση της εξίσωσης δεν επηρεάζεται.

Έτσι, αν η εξίσωση (2) πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό 2, οι συντελεστές του x θα γίνουν ίσοι με αντίθετα πρόσημα.

$$2x + 3y = 12.5 \ (1) \ όπως \ δίνεται$$

$$-2\chi + 4y = 12 \ (2) * 2$$

$$0 + 7y = 24.5 \quad προσθέτοντας \ τις \ δύο \ εξισώσεις$$

Άρα $y = \frac{24.5}{7} = 3.5$

Βήμα 2

Αντικαθιστώντας το $y = 3.5$ στην εξίσωση (2) έχουμε:

$$-x + 2(3.5) = 6$$

$$x = 1$$

Βήμα 3

Επαληθεύουμε τη λύση $x = 1$, $y = 3.5$ στην εξίσωση (1)

$$2x + 3y = 12.5$$

$$2(1) + 3(3.5) = 12.5$$

$$12.5 = 12.5$$

Η εξίσωση (1) ικανοποιείται, άρα το $\chi = 1,\ \ y = 3.5$ είναι μία λύση.

Αντικαθιστώντας το $x = 1\ και\ y = 3.5$ στην εξίσωση (2), έχουμε:

$$-x + 2y = 6$$

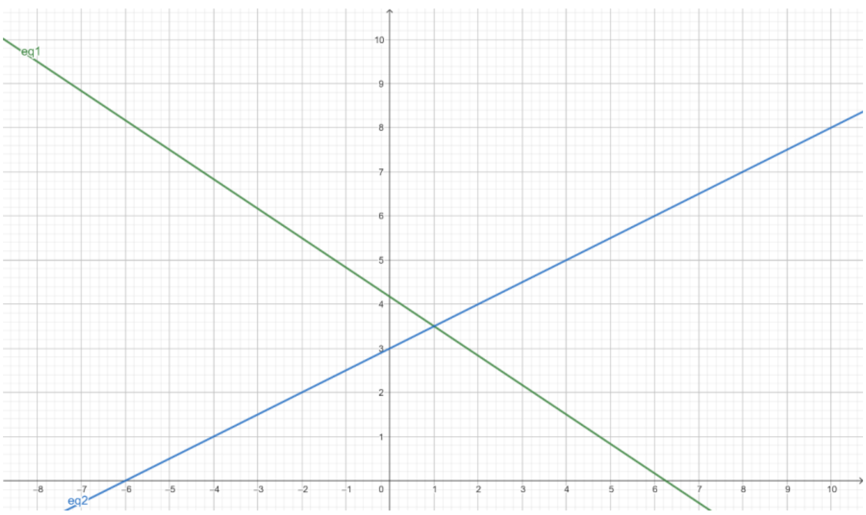
$$-1 + 2(3.5) = 6$$

$$6 = 6$$

Άρα η εξίσωση (2) ικανοποιείται.

Επομένως, η λύση των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκεται στο σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις τις (1) και (2).

b)



2.Επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης (methods of substitution)

Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλύσουμε μία από τις εξισώσεις ως προς μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης.

$$2x + 3y = 12.5 \quad (1)$$

$$-x + 2y = 6 \qquad (2)$$

Από την (2) έχουμε ότι $-x + 2y = 6$. Αντικαθιστώντας την (2) στην (1), έχουμε:

$$2x + 3y = 12.5 \ \Rightarrow 2 \times (2y - 6) + 3y = 12.5 \ \Rightarrow 7y = 24.5 \ \Rightarrow y = 3.5$$

Αντικαθιστώντας για $y = 3.5$ και λύνοντας οποιαδήποτε εξίσωση ως προς x, έχουμε:

$$\chi = 2y - 6 \ \Rightarrow x = 2(3.5) - 6 \Rightarrow x = 1$$

Η μέθοδος της αντικατάστασης είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων όπου η μία είναι γραμμική και η άλλη μη γραμμική.

Άσκηση 2.1

Δίνεται το σύστημα εξισώσεων:

$$y = 1 + x \ \ (1)$$

$$y = 2 + x \ \ (2)$$

a. Να επιλυθεί αλγεβρικά ως προς x και y
b. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση

Λύση

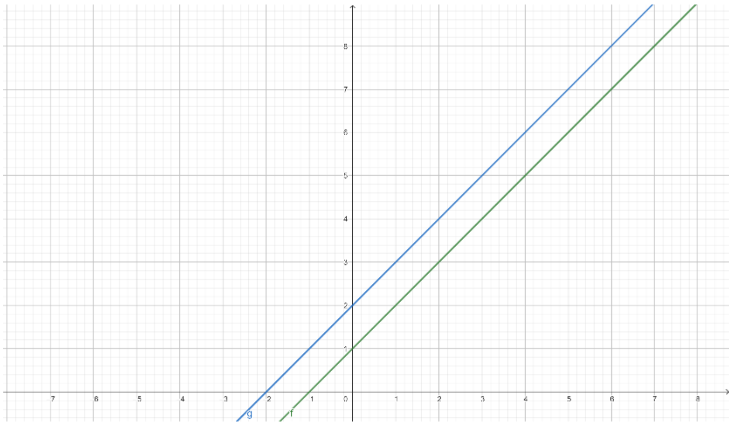
a)

$$y = 1 + x \ \ (1)$$

$$y = 2 + x \ \ (2)$$

Εάν αφαιρέσουμε την (1) από την (2) παίρνουμε $0 = -1$, που είναι αντίφαση. Άρα, δεν υπάρχει λύση και οι δύο εξισώσεις δε μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα.

b)



Άσκηση 2.2

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$y = 2 - x \ (1)$$

$$2y = 4 - 2x \ (2)$$

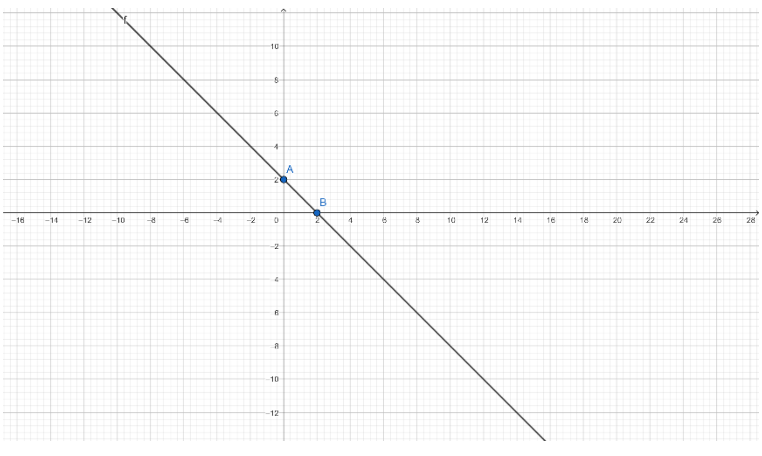
a. Να επιλυθεί ως προς το x και y αλγεβρικά
b. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση

<u>Λύση</u>

a) Όταν η εξίσωση (2) διαιρεθεί με το 2, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι ακριβώς ίδια με την (1). Συνεπώς, υπάρχει μία μόνο εξίσωση με δύο αγνώστους όπου, εάν δώσουμε μία τιμή στο x, τότε βρίσκουμε την τιμή του y.

Άρα υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών που ικανοποιούν τις εξισώσεις ενός τέτοιου συστήματος.

b)



Οι εξισώσεις αναπαριστούν ευθείες που ταυτίζονται και έτσι κάθε σημείο πάνω στη μία ευθεία είναι επίσης ένα σημείο της άλλης ευθείας.

3.Εκθετικές Συναρτήσεις (Exponential Function)

Η εκθετική συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x) = a^x$, όπου:

- a η βάση της εκθετικής συνάρτησης
- x ο εκθέτης της εκθετικής συνάρτησης ή αλλιώς το μεταβλητό μέρος της συνάρτησης.

Άσκηση 3.1

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω εκφράσεις:

i. $\frac{2^5}{2^3 2^{-4}}$

ii. $\frac{\sqrt{3^5}}{3^{-4} 3^4}$

iii. $\left(\frac{3L^{0.5}}{L^{-2}}\right)^{2}$

iv. $\frac{4e^{a+2\beta} - 2e^a}{2e^a}$

Λύση

i. $\frac{2^5}{2^3 2^{-4}} = \frac{2^5}{2^{-1}} = 2^{5-(-1)} = 2^6 = 64$

ii. $\frac{\sqrt{3^5}}{3^{-4} 3^4} = \frac{3^{5/2}}{3^0} = \frac{3^{5/2}}{1} = 3^{5/2}$

iii. $\left(\frac{3L^{0.5}}{L^{-2}}\right)^{2} = \left(\frac{3L^{0.5-(-2)}}{1}\right)^{2} = \left(\frac{3L^{2.5}}{1}\right)^{2} = 9L^5$

iv. $\frac{4e^{a+2\beta} - 2e^a}{2e^a} = \frac{4e^a e^{2\beta} - 2e^a}{2e^a} = \frac{2e^a\,(2e^{2\beta} - 1)}{2e^a} = 2e^{2\beta} - 1$

4. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Κανόνες Λογαρίθμων

1. Πρόσθεση
    a. $\log_b(M) + \log_b(N) \Leftrightarrow \log_b(MN)$
        i. Παράδειγμα: $\ln(4) + \ln(29) = \ln(4 \times 29)$

$$1.3863 + 3.3673 = \ln(116)$$

$$4.7536 = 4.7536$$

2. Αφαίρεση
    a. $\log_b M - \log_b N \Leftrightarrow \log_b\left(\frac{M}{N}\right)$
        i. Παράδειγμα: $\log(90) - \log 26 = \log\left(\frac{90}{26}\right)$

$$19542 - 14150 = \log(3.4615)$$

$$0.5392 = 0.5392$$

3. Log εκθετικής
    a. $\log_b(M^z) \Leftrightarrow z\log_b M$
        i. $\log(5^3) = 3\log 5$

$$\log 125 = 3(0.69897)$$

2.09691 = 2.09691

4. Αλλαγή Βάσης
    a. $\log_b(N) \Leftrightarrow \frac{\log_x(N)}{\log_x(b)}$
        i. $\log_2 16 = \frac{\log(16)}{\log(2)} = \frac{1.2041}{0.3010} = 4$

Άσκηση 4.1

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες των αλγορίθμων, να απλοποιήσετε την παρακάτω έκφραση σε έναν όρο, εάν είναι δυνατόν:

$4\log_x(7) - 3\log_x(0.85) + \log_x(10)\ ,\ x = e$

<u>Λύση</u>

Η λύση του συγκεκριμένου βασίζεται αρχικά στον κανόνα 1 και στη συνέχεια στους κανόνες 1 και 2.

$$4\log_x(7) - 3\log_x(0.85) + \log_x(10) = \log_x(7)^4 - \log_x(0.85)^3 + \log_x(10) =$$

$= \log_x(\frac{7^4}{0.85^3}) + \log_x(10) = \log_x(39096.275) + \log_x 10 = \log_x(39096.275 * 10) = \log_x(39096.275)$

Δεδομένου ότι x=e, παίρνουμε ln (39096.275)= 10.57378

Άσκηση 4.2

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα επιλύσουμε με λογαριθμικούς κανόνες.

Να επιλυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$20 = 3(1.08)^X$

$\log\left(\frac{20}{3}\right) = \log(1.08)^x$

$\log(\frac{20}{3}) = x\log 1.08$

$\frac{\log(\frac{20}{3})}{\log 1.08} = x$

$\frac{0.8239}{0.0334} = x = 24.65$

5. Έννοια του ορίου

Η παράγωγος dy/dx έχει οριστεί ως το όριο του πηλίκου διαφοράς Δy/Δx, καθώς το $\Delta x \to 0$.

Εάν το $q \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}$ και $v \equiv \Delta x$, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{v\to 0} q$$

Εν συντομία, το όριο εξετάζει ποιες τιμές πλησιάζει μία μεταβλητή (q) όταν μία άλλη μεταβλητή (v) πλησιάζει μία συγκεκριμένη τιμή.

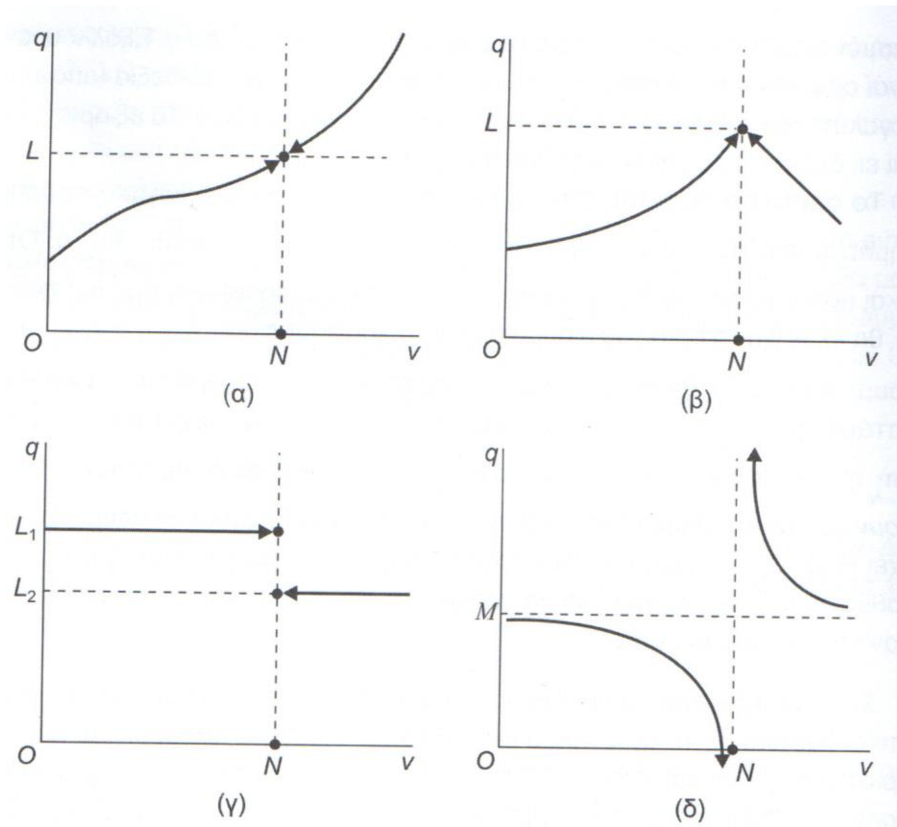
5.1 Γραφικές Παραστάσεις

Το σχήμα (α) δείχνει ότι, καθώς η μεταβλητή $\nu \to N$ είτε από αριστερά είτε από δεξιά στον οριζόντιο άξονα, η μεταβλητή q τείνει στη τιμή L. Συνεπώς, το αριστερό όριο είναι ταυτοτικά ίσο με το δεξιό. Άρα, το όριο μπορεί να γραφεί $\lim_{\nu \to N} q = L$

Στο σχήμα (β) παρουσιάζεται ένα απότομο σημείο καμπής ακριβώς πάνω από το σημείο N. Καθώς το $\nu \to N$ είτε από τη μία πλευρά είτε από την άλλη, το q θα τείνει πάλι στην ίδια τιμή L. Το όριο του q πάλι υπάρχει και είναι ίσο με L.

Το σχήμα (γ) δείχνει ότι καθώς $\nu \to N$, το αριστερό όριο του q είναι L_1, αλλά το δεξιό είναι L_2, ένας διαφορετικός αριθμός. Έτσι, το q δεν έχει όριο, καθώς το $\nu \to N$.

Τέλος, το σχήμα (δ) δείχνει ότι, καθώς το $\nu \to N$, το δεξιό όριο είναι $+\infty$, ενώ το αριστερό όριο είναι $-\infty$, γιατί τα δύο μέρη της υπερβολής θα ανεβαίνουν και θα κατεβαίνουν επ' άπειρον όταν θα πλησιάζουν τη διακεκομμένη ευθεία γραμμή ασυμπτωτικά.



Άσκηση 5.1

Να βρεθεί το παρακάτω όριο:

$$\lim_{\chi \to 3} \frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\sqrt{\chi} - \sqrt{3}}$$

<u>Λύση</u>

$\lim_{\chi \to 3} \frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\sqrt{\chi} - \sqrt{3}} = \lim_{\chi \to 3} \frac{(\chi-3)(\chi-1)}{\sqrt{\chi} - \sqrt{3}}$ [2] $= \lim_{\chi \to 3} \frac{(\chi-3)(\chi-1)\,(\sqrt{\chi}+\sqrt{3})}{(\sqrt{\chi} - \sqrt{3})(\sqrt{\chi}+\sqrt{3})} =$

$\lim_{\chi \to 3} \frac{(\chi-3)(\chi-1)\,(\sqrt{\chi}+\sqrt{3})}{(\sqrt{\chi})^2 - (\sqrt{3})^2}$ [3] $= \lim_{\chi \to 3} \frac{(\chi-3)(\chi-1)\,(\sqrt{\chi}+\sqrt{3})}{\chi-3} = \lim_{\chi \to 3} (\chi - 1)\left(\sqrt{\chi} + \sqrt{3}\right) =$

$= 2 \times 2\sqrt{3} \;= 4\sqrt{3}$

Άσκηση 5.2

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο συνάρτησης πολλαπλού τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 + x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια όπου, εάν είναι ίσα, αυτό σημαίνει ότι το όριο υπάρχει.

$$\lim_{x \to 1^-} 2x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + x + 1 = 3$$

Άρα, το όριο υπάρχει.

---

[2] Για την παραγοντοποίηση χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

[3] Βασιζόμενοι στις μαθηματικές ιδιότητες, έχουμε τη δυνατότητα να πολλαπλασιάσουμε πάνω και κάτω με το συζυγή. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.