Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2023

Διδάσκων: Ιωάννης Κοσπεντάρης

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1 Ελεύθερη Βελτιστοποίηση (3.5 μονάδες)

Μια επιχείρηση έχει τη συνάρτηση παραγωγής $Q(L) = \ln(1 + L)$, όπου Q είναι η ποσότητα παραγόμενου προϊόντος και L οι ώρες εργασίας που χρησιμοποιεί η επιχείρηση. Η επιχείρηση πουλάει το προϊόν της σε μια ανταγωνιστική αγορά σε τιμή p και προσλαμβάνει εργαζομένους με ωρομίσθιο w (τα p και w είναι παράμετροι). Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι $\Pi = pQ(L) - wL = p\ln(1 + L) - wL$.

1. Να διατυπωθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους της επιχείρησης και να διερευνηθεί το αν είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού. (1 μονάδα)
2. Να βρεθεί η ποσότητα ωρών εργασίας $L^\star$ που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης. Για ποιες τιμές των παραμέτρων p και w το $L^\star$ είναι εσωτερικό ακρότατο ($L^\star > 0$) και για ποιες τιμές είναι συνοριακό ($L^\star = 0$); (1 μονάδα)
3. Για την περίπτωση εσωτερικού ακροτάτου ($L^\star > 0$) να βρεθεί το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης $\Pi^\star$ ως συνάρτηση των p και w και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, κυρτότητας και ομογένειας αυτής της συνάρτησης. (1.5 μονάδα)

2 Περιορισμένη Βελτιστοποίηση (3.5 μονάδες)

Ένας καταναλωτής έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$, όπου x και y οι ποσότητες δύο αγαθών.

1. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής (καμπύλης αδιαφορίας) για $x > 0$ και $y > 0$ και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y ως προς το x. (1 μονάδα)
2. Έστω ότι η τιμή του αγαθού x είναι p_x, η τιμή του αγαθού y είναι p_y και το εισόδημα του καταναλωτή είναι I. Ο εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή μπορεί να διατυπωθεί ως $p_x x + p_y y = I$. Να διατυπωθεί το πρόβλημα περιορισμένης μεγιστοποίησης της χρησιμότητας υπό τον εισοδηματικό περιορισμό και να βρεθεί η λύση του για $x > 0$ και $y > 0$. (1.5 μονάδα)
3. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange στο παραπάνω εσωτερικό ακρότατο και να επαληθευτεί ότι $\frac{du^\star}{dI} = \lambda^\star$. (1 μονάδα)

3 Διάφορα Θέματα (3 μονάδες)

1. Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w = w(z, t), z = z(x, y), y = y(x, t)\}$. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης για την $\frac{\partial w}{\partial x}$ και $\frac{\partial w}{\partial t}$. (1 μονάδα)
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2$. Να βρεθεί η ελαστικότητα της όταν $x = 4$ και να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή από αυτή την τιμή κατά $\Delta x = 1\%$. (1 μονάδα)
   (στην τιμή της)
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\ln(1 + x)$. Να γίνει το γράφημα της και να βρεθούν η γραμμική και παραβολική της προσέγγιση στο σημείο $x = 0$. (1 μονάδα)

(1)

1. $\max \Pi = \overbrace{p \cdot \ln(L+1)}^{\text{κοίλη}} - \overbrace{wL}^{\text{γραμμική}}$, $L \geq 0,\ p>0,\ w>0$

$$\Pi'(L) = \frac{p}{L+1} - w \quad \text{και} \quad \Pi''(L) = -\frac{p}{(L+1)^2} < 0 \ , \forall L \geq 0$$

$\Rightarrow$ η $\Pi(L)$ είναι κοίλη (γνήσια)

Έχουμε λοιπόν πρόβλημα εύρεσης μεγίστου σε κοίλη συνάρτηση. Άρα, έχουμε <u>Πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού</u>.

2. Το maximum θα βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$$\Pi'(L) = 0 \Rightarrow \frac{p}{L+1} - w = 0 \Rightarrow p - w(L+1) = 0$$

$$\Rightarrow p - wL - w = 0 \Rightarrow wL = p - w$$

$$\Rightarrow L^* = \frac{p-w}{w}$$

Άρα, όταν $p > w$ τότε $L^* > 0$ (εσωτερικό ακρότατο)

Όταν όμως $p \leq w \Rightarrow L^* = 0$ (συνοριακό)
[δηλ. η λύση θα βρίσκεται στο σύνορο]

3. Αν $\boxed{P > W}$ ($\Longleftrightarrow L^* > 0 \Longleftrightarrow$ εσωτερικό ακρότατο)

Τότε, το Μέγιστο Κέρδος θα δίνεται από:

$$\Pi^* = \Pi(L^*) = \Pi\left(\frac{P-W}{W}\right) = P \cdot \ln(L^*+1) - W \cdot L^* =$$

$$= P \cdot \ln\left(\frac{P-W}{W} + 1\right) - \cancel{W} \cdot \frac{(P-W)}{\cancel{W}} =$$

$$= P \cdot \ln\left(\frac{P}{W} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) - P + W$$

$$= \boxed{P \cdot \ln\left(\frac{P}{W}\right) - P + W} \quad (*) \checkmark$$

$$= P \ln P - P - P \ln W + W \quad (**) \checkmark$$

(3

Αν όμως $p \leq w$ τότε το κέρδος θα είναι μηδενικό $(\Pi = 0)$, αφού $\Pi'(0) = p - w \leq 0$

$$\Downarrow$$

Δεν θα έχουμε παραγωγή.

→ Άρα είμαστε στην περίπτωση όπου $\boxed{p > w}$:

με $\boxed{\Pi^* = \Pi(L^*) = p \cdot \ln p - p - p\ln w + w}$

κι έχουμε: $\Pi_p = \ln p + \cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}} - 1 - \ln w$

$$= \ln p + \cancel{1} - \cancel{1} - \ln w$$

$$= \ln p - \ln w = \ln\left(\frac{p}{w}\right) > 0 \quad (p > w)$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

$$\Pi_w = -\frac{p}{w} + 1 < 0$$

⇒ η Π^* είναι <u>p-αύξουσα</u>, <u>w-φθίνουσα</u>.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

$\Pi_{pp} = \frac{1}{p}$ $\quad \Pi_{pw} = -\frac{1}{w}$

$\Pi_{wp} = -\frac{1}{w}$ $\quad \Pi_{ww} = \frac{p}{w^2}$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{\cancel{p}} \cdot \frac{\cancel{p}}{w^2} - \left(-\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2} = 0$$

Αφού $\Pi_{pp} > 0$, $\Pi_{ww} > 0$ και $\Delta = 0$ (κρκει $\Delta \geq 0$)

⇒ Η Π^* είναι $\{p, w\}$-<u>κυρτή</u>!!!

→ Για την <u>Ομογένεια</u> :

Παίρνουμε τη συνάρτηση μέγιστου Κέρδους (από την $* \Rightarrow$) $\Pi^* = \Pi(L^*) = p \cdot \ln\left(\frac{p}{w}\right) - p + w$ και θέτουμε $p = t \cdot P$ και $w = t \cdot W$

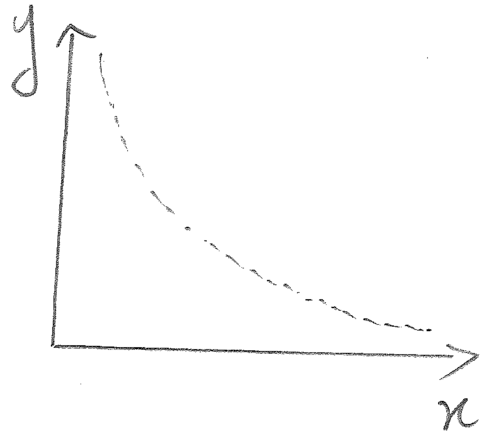
Έτσι, είναι:
$$\Pi^*(tP, tW) = tP \cdot \ln\left(\frac{\cancel{t}P}{\cancel{t}W}\right) - tP + tW$$
$$= tP \cdot \ln\left(\frac{P}{W}\right) - tP + tW$$
$$= t\left[P \ln\left(\frac{P}{W}\right) - P + W\right]$$
$$= t^1 \cdot \Pi(P, W)$$

Άρα, είναι ομογενής 1ου βαθμού!

(2)

1. $u(x,y) = x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ (Cobb-Douglas)

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{\cancel{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} y^{1/2}}{\cancel{\frac{1}{2}} x^{1/2} \cdot y^{-1/2}} = -x^{-1} \cdot y^{1} \checkmark$$



2. Πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης

$$\max\{\underbrace{u(x,y)}_{f(x,y)}=\sqrt{x\cdot y} \parallel g(x,y)=p_x\cdot x+p_y\cdot y=\underbrace{I}_{c}\}$$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \lambda\cdot g_x \\ u_y &= \lambda\cdot g_y \\ g &= I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y}{2\sqrt{x\cdot y}} &= \lambda\cdot p_x \quad (i) \\ \frac{x}{2\sqrt{x\cdot y}} &= \lambda\cdot p_y \quad (ii) \\ p_x\cdot x+p_y\cdot y &= I \quad (iii) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\frac{(i)}{(ii)}} \frac{y}{x}=\frac{\cancel{2\lambda} p_x\cdot \cancel{\sqrt{x\cdot y}}}{\cancel{2\lambda} p_y\cdot \cancel{\sqrt{x\cdot y}}}$$

$$\Rightarrow \quad y = x\cdot\frac{p_x}{p_y}$$

που αντικαθιστώντας στον εισοδηματικό περιορισμό θα έχουμε:

$$p_x\cdot x^* + \cancel{p_y}\cdot x^*\cdot\frac{p_x}{\cancel{p_y}} = I$$

$$\Rightarrow 2p_x\cdot x^* = I \Rightarrow \boxed{x^*=\frac{I}{2p_x}}$$

Αντίστοιχα:

$$x = y\cdot\frac{p_y}{p_x}$$

$\Downarrow$ από εισοδηματικό περιορισμό

$$\cancel{p_x}\cdot y^*\cdot\frac{p_y}{\cancel{p_x}} + p_y\cdot y^* = I \Rightarrow 2p_y\cdot y^* = I \Rightarrow \boxed{y^*=\frac{I}{2p_y}}$$

(7)

3.

Άρα: $\lambda = \frac{u_x}{g_x} = \frac{\frac{y^*}{2\sqrt{x^* y^*}}}{P_x} = \frac{y^*}{2P_x \cdot \sqrt{x^* \cdot y^*}} = \frac{(\sqrt{y^*})^{\cancel{2}}}{2P_x \cdot \sqrt{x^*} \cdot \cancel{\sqrt{y^*}}} =$

$$= \frac{1}{2P_x} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\cancel{I}}{\cancel{2}P_y}}{\frac{\cancel{I}}{\cancel{2}P_x}}} = \frac{1}{2P_x} \cdot \sqrt{\frac{P_x}{P_y}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{P_x \cdot P_y}} \quad (1)$$

και

$$\lambda = \frac{u_y}{g_y} = \frac{\frac{x^*}{2\sqrt{x^* \cdot y^*}}}{P_y} = \frac{x^*}{2P_y \cdot \sqrt{x^* y^*}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^*}^{\cancel{2}}}{2 \cdot P_y \cdot \cancel{\sqrt{x^*}} \cdot \sqrt{y^*}} = \frac{\sqrt{x^*}}{2P_y \cdot \sqrt{y^*}} = \frac{1}{2P_y} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\cancel{I}}{\cancel{2}P_x}}{\frac{\cancel{I}}{\cancel{2}P_y}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{P_y}^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{P_y}}}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{2\sqrt{P_x \cdot P_y}} \quad (2)$$

(1) = (2)

• Πράγματι, από τη θεωρία πρέπει να ισχύει

$$\frac{u_x}{g_x} = \frac{u_y}{g_y} \checkmark$$

Η maximum τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, θα είναι:

$$u^* = \sqrt{x^* \cdot y^*} = \sqrt{\frac{I}{2P_x} \cdot \frac{I}{2P_y}} = \frac{\sqrt{I^2}}{2\sqrt{P_x P_y}} = \frac{I}{2\sqrt{P_x P_y}} = u^*(I).$$

(8

θ.δ.ο. : $u^{*\prime}(I) = \dfrac{du^*}{dI} = \lambda^*$

$$\frac{du^*}{dI} = \frac{d\left(\frac{I}{2\sqrt{p_x p_y}}\right)}{dI} = \frac{1}{2\sqrt{p_x \cdot p_y}} = \lambda^*$$

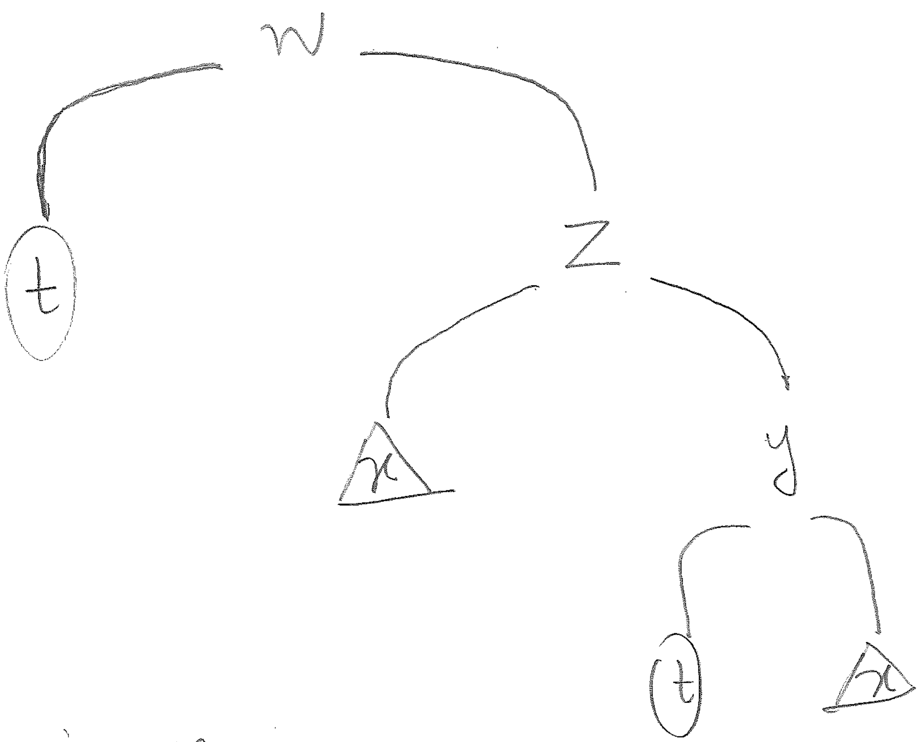
λ is the shadow price of the restriction

(3)

1. Δίνεται η σύνθεση των συναρτήσεων:

$$\{ w = w(z,t) \,,\; z = z(x,y) \,,\; y = y(x,t) \}$$

(α) Δέντρο εξάρτησης:



Τελικά, έχουμε

<u>Δύο</u> (2) ανεξάρτητες μεταβλητές την t και τη x.

Για τη x, 2 διαδρομές (άρα αλυσωτή μερική παράγωγος με 2 προσθετικούς όρους)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

ή $w_x(x,t) = w_z(z,t)\cdot z_x(x,y) + w_z(z,t)\cdot z_y(x,y)\cdot y_x(x,t)$

Για την t, 2 διαδρομές :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

ή

$$w_t(x,t) = w_t(z,t) + w_z(z,t) \cdot z_y(x,y) \cdot y_t(x,t)$$

(3)

2. $f(x) = x^2 + 1$

(α) Να βρεθεί η ελαστικότητά της όταν $x=4$:

$f'(x) = 2x$, οπότε : $E_x f = \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)} =$

$$= \frac{x \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1} \overset{x=4}{=\!=} \frac{2 \cdot 4^2}{4^2+1} = \frac{32}{17} > 1$$

αφού $E_x f > 1 \Rightarrow$ η f ελαστική ✓

(b) Να εκτιμηθεί η % μεταβολή στην τιμή της όταν $\Delta x = 1\%$ (δηλ. όταν το x αλλάζει από την αρχική τιμή $x=4$ κατά $\%\Delta x = 1\%$)

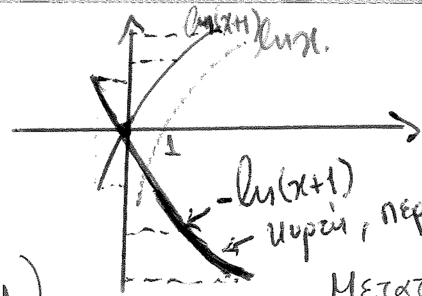
→ Για την εκτίμηση: $(\%\Delta x \simeq \%dx$ και $\%\Delta y \simeq \%dy)$

Είναι: $E_x f = \dfrac{\%dy}{\%dx} \Leftrightarrow \dfrac{32}{17} = \dfrac{\%dy}{\%dx}$

$$\Leftrightarrow \%dy = \frac{32}{17}(\%dx) \overset{\%dx \simeq 1\%}{\Longleftrightarrow} \%dy = \frac{32}{17} \cdot 1\%$$

$$\Leftrightarrow \%dy = 1{,}88\%$$ ✓

(3)



3. $f(x) = -\ln(x+1)$

$-\ln(x+1)$ ← κυρτή, περνάει από την $O(0,0)$ και έχει αντίθετη y με την $\ln(x+1)$

← Μετατόπιση καταρχήν της $\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά και στη συνέχεια παίρνουμε τις αντίθετες τιμές αυτής

$f'(x) = -\dfrac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow f$ φθίνουσα

$f''(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή (γνήσια)

⊙ Γραμμική προσέγγιση: (γύρω από το $x_0=0$)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$= f(0) + f'(0)(x-0) = -\ln 1 - \frac{1}{0+1}\cdot x$$

$$= -(x + \underbrace{\ln 1}_{0}) = -x \;✓$$

⊙ Παραβολική προσέγγιση: (γύρω από το $x_0=0$)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$

$$= -\underbrace{\ln 1}_{0} - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x. \;✓$$