

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Κατατακτήριες Εξετάσεις 2023

Διδάσκων: Ιωάννης Κοσπεντάρης

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1 Ελεύθερη Βελτιστοποίηση (3.5 μονάδες)

Μια επιχείρηση έχει τη συνάρτηση παραγωγής $Q(L) = \ln(1 + L)$, όπου Q είναι η ποσότητα παραγόμενου προϊόντος και L οι ώρες εργασίας που χρησιμοποιεί η επιχείρηση. Η επιχείρηση πουλάει το προϊόν της σε μια ανταγωνιστική αγορά σε τιμή p και προσλαμβάνει εργαζομένους με ωρομίσθιο w (τα p και w είναι παράμετροι). Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι $\Pi = pQ(L) - wL = p \ln(1 + L) - wL$.

1. Να διατυπωθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους της επιχείρησης και να διερευνηθεί το αν είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού. (1 μονάδα)
2. Να βρεθεί η ποσότητα ωρών εργασίας L^* που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης. Για ποιες τιμές των παραμέτρων p και w το L^* είναι εσωτερικό ακρότατο ($L^* > 0$) και για ποιες τιμές είναι συνοριακό ($L^* = 0$); (1 μονάδα)
3. Για την περίπτωση εσωτερικού ακροτάτου ($L^* > 0$) να βρεθεί το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης Π^* ως συνάρτηση των p και w και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, κυρτότητας και ομογένειας αυτής της συνάρτησης. (1.5 μονάδα)

2 Περιορισμένη Βελτιστοποίηση (3.5 μονάδες)

Ένας καταναλωτής έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$, όπου x και y οι ποσότητες δύο αγαθών.

1. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής (καμπύλης αδιαφορίας) για $x > 0$ και $y > 0$ και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y ως προς το x . (1 μονάδα)
2. Έστω ότι η τιμή του αγαθού x είναι p_x , η τιμή του αγαθού y είναι p_y και το εισόδημα του καταναλωτή είναι I . Ο εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή μπορεί να διατυπωθεί ως $p_x x + p_y y = I$. Να διατυπωθεί το πρόβλημα περιορισμένης μεγιστοποίησης της χρησιμότητας υπό τον εισοδηματικό περιορισμό και να βρεθεί η λύση του για $x > 0$ και $y > 0$. (1.5 μονάδα)
3. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange στο παραπάνω εσωτερικό ακρότατο και να επαληθευτεί ότι $\frac{du^*}{dI} = \lambda^*$. (1 μονάδα)

3 Διάφορα Θέματα (3 μονάδες)

1. Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w = w(z, t), z = z(x, y), y = y(x, t)\}$. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγωγής για την $\frac{\partial w}{\partial x}$ και $\frac{\partial w}{\partial t}$. (1 μονάδα)
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2$. Να βρεθεί η ελαστικότητα της όταν $x = 4$ και να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή από αυτή την τιμή κατά $\Delta x = 1\%$. (1 μονάδα)
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\ln(1 + x)$. Να γίνει το γράφημα της και να βρεθούν η γραμμική και παραβολική της προσέγγιση στο σημείο $x = 0$. (1 μονάδα)