Φροντιστήριο.ΙΙΙ(Β)

1

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=1+x^2+xy$**. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.**

2

Το πρόβλημα: $\max\{f(x,y)=x^{1/2}y \,\|\, g(x,y)=x+8y=12\}$ **στη θετική περιοχή, έχει τη λύση:** $\{x=4, y=1\}$**. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:** $\max\{h(x,y)=\ln x+2\ln y \,\|\, g(x,y)=x+8y=12\}$

3

Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση: $f(x,y)=x-y$

Να δοθούν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στην τετραγωνική περιοχή: $\{1\le x\le 2,\ 1\le y\le 4\}$

4

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x,y)=x^2+4y^2-4xy+1$**. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της.**

5

Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης $\max\{x+y \,\|\, x^2+y^2=c\}$ **έχει την λύση:**

$$x^*=\sqrt{c/2},\ y^*=\sqrt{c/2}$$

Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

6

Να διαπιστωθεί ότι το σημείο $(x=1, y=2)$ **είναι ελεύθερο στάσιμο της συνάρτησης** $f(x,y)=x^2y^2-8x-4y$**, και να χαρακτηριστεί.**

7

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημό της η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:

$$\tilde{Q}:\{Q=x^2+y^2 \,|\, L=x+2y=0\}$$

8

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το (ελεύθερο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=x^2y-2x-y$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$**.**

9

Το περιορισμένο στάσιμο της συνάρτησης $f=x^2+y^2$ **με τον περιορισμό** $g=2x+y=5$**, είναι** $(x=2, y=1)$**. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.**

10

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q=2x^2+y^2-2xy$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:** $\tilde{Q}=\{2x^2+y^2-2xy \,\|\, 2x-y=0\}$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.**

11

Να βρεθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος περιορισμένης βελτιστοποίησης, κάνοντας και το σχετικό γράφημα:

$\min\{2x+y \,\|\, x^2+y^2=5\}$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

12

Στη θετική περιοχή: $\{x\ge 0, y\ge 0\}$ **θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:**

$\min\{x^2+y \,\|\, 4x+y=c\}$ **με** $c>0$

Να βρεθεί η λύση και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange

<u>13</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{f = xy \,\|\, g = 2x + y = c,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

Να βρεθεί η λύση, και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange.

<u>14</u>

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q = -2x^2 - y^2 + xy$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:** $\tilde{Q} = \{-2x^2 - y^2 + xy \,\|\, 2x - y = 0\}$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.**

<u>15</u>

Το πρόβλημα: $\max\{f(x,y) = xy^{1/2} \,\|\, g(x,y) = 8x + y = 12\}$ **στη θετική περιοχή, έχει την περιορισμένη στάσιμη λύση:** $\{x = 1, y = 4\}$**. Να βρεθεί η λύση και ο πολλαπλασιαστής Lagrange για το πρόβλημα:**

$$\max\{h(x,y) = 2\ln x + \ln y \,\|\, g(x,y) = 8x + y = 12\}$$

<u>16</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα: $\max\{f(x,y) = (x^{1/2} + 2y^{1/2})^2 \,\|\, g(x,y) = 2x + y = 18\}$

Να βρεθεί η λύση του και να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής.

<u>17</u>

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος: $\min\{f(x,y) = (x^{1/2} + 2y^{1/2})^2 \,\|\, g(x,y) = 2x + y = 4\}$

<u>18</u>.

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = e^{xy}$**.**

<u>19</u>

Στον επίπεδο Oxy**, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου** $(0,0)$ **από τα σημεία της ευθείας** $x + 2y = c$**.**

<u>20</u>

Το σημείο $\{x = 1, y = 2\}$ **είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης:** $f(x,y) = 2x + y$**, με τον περιορισμό:** $g(x,y) = xy = 2$**, στη θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$**.**

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, και αναλυτικά και γραφικά

Φροντιστήριο.ΙΙΙ(Β)-Λύσεις

1

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=1+x^2+xy$**. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.**

Λύση. Το στάσιμο είναι:

$$f(x,y)=1+x^2+xy \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x &= 2x+y=0 \\ f_y &= x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x=0, y=0)$$

με:

$$f_{xx}=2>0,\ f_{yy}=0,\ f_{xy}=1 \Rightarrow \Delta_f = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(2)(0)-1^2=-1<0$$

Επομένως είναι σαγματικό. Άλλο στάσιμο δεν υπάρχει, οπότε το μέγιστο θα βρίσκεται στο άπειρο με άπειρη τιμή, διότι παίρνοντας $y=0$, βρίσκουμε:

$$f(x,0)=1+x^2 \to +\infty \quad \text{όταν } x\to\infty$$

2

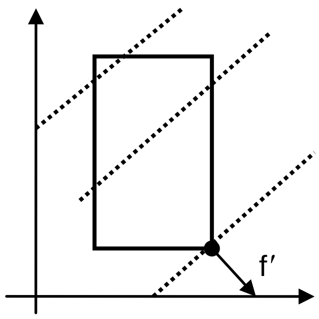
Το πρόβλημα: $\max\{f(x,y)=x^{1/2}y \,\|\, g(x,y)=x+8y=12\}$ **στη θετική περιοχή, έχει τη λύση:** $\{x=4, y=1\}$**. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:** $\max\{h(x,y)=\ln x+2\ln y \,\|\, g(x,y)=x+8y=12\}$

Λύση. Η h είναι αύξουσα συνάρτηση της f :

$$\ln x+2\ln y=2\ln x^{1/2}y \Rightarrow h=2\ln f$$

οπότε θα έχει τις ίδιες ισοσταθμικές με την ίδια διάταξη, και επομένως η λύση θα είναι ίδια: $\{x=4, y=1\}$

3



Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση: $f(x,y)=x-y$

Να δοθούν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στην τετραγωνική περιοχή: $\{1\le x\le 2,\ 1\le y\le 4\}$

Λύση1. Οι ισοσταθμικές είναι ευθείες με θετική κλίση:

$$f(x,y)=x-y=c \Rightarrow y=x-c$$

και οι τιμές αυξάνουν προς τα δεξιά: $f_x=1>0$, και κάτω: $f_y=-1<0$

Η μέγιστη τιμή θα βρίσκεται στην κορυφή δεξιά-κάτω:

$$(x^*=2,\ y^*=1) \Rightarrow f^*=2-1=1$$

Λύση2. Είναι χωριζομένων μεταβλητών, ισοδύναμη με τα δύο προβλήματα:

$$\max\{g(x)=x \,\|\, 1\le x\le 2\} \Rightarrow x^*=2, \quad \max\{g(y)=x \,\|\, 1\le y\le 4\} \Rightarrow y^*=4$$

ναλλακτικά, μπορείτε να εξετάστε την συνάρτηση στα τέσσερα τμήματα του συνόρου, με αντικατάσταση. Στο εσωτερικό δεν μπορεί να είναι διότι ως γραμμική δεν έχει στάσιμο.

4

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x,y)=x^2+4y^2-4xy+1$**. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της.**

Λύση. Το στάσιμο είναι:

$$f(x,y)=x^2+4y^2-4xy+1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x &= 2x-4y=0 \\ f_y &= 8y-4x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x-2y=0$$

ολόκληρη ευθεία διότι οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Οι δεύτερες παράγωγοι μας δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x-4y=0 \\ f_y &= 8y-4x=0 \end{aligned}\right\} f_{xx}=2>0,\ f_{yy}=8>0,\ f_{xy}=-4 \Rightarrow \Delta_f=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(2)(8)-4^2=0\ge 0$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή και επομένως τα στάσιμα δίνουν ολικό ελάχιστο.

Παρατήρηση. Ειδικότερα η συνάρτηση πρέπει να έχει την ίδια τιμή σόλα τα σημεία της ευθείας. Πράγματι:

$$x=2y \Rightarrow f=x^2+4y^2-4xy+1=(2y)^2+4y^2-4(2y)y+1\equiv 1$$

5

Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης $\max\{x+y \,\|\, x^2+y^2=c\}$ **έχει την λύση:**

$$x^* = \sqrt{c/2},\; y^* = \sqrt{c/2}$$

Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

Λύση. Ο πολλαπλασιαστής δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{1}{2x^*} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \text{ ή ισοδύναμα: } \lambda = \frac{f_y}{g_y} = \frac{1}{2y^*} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \text{ (πρέπει να είναι ίσα)}$$

Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ως συνάρτηση του c είναι:

$$f^*(c) = x^* + y^* = 2\sqrt{c/2} = \sqrt{2c}$$

με παράγωγο τον πολλαπλασιαστή:

$$f^{*\prime}(c) = (\sqrt{2}c^{1/2})' = \sqrt{2}c^{-1/2}/2 = 1/\sqrt{2c} = \lambda$$

6

Να διαπιστωθεί ότι το σημείο $(x=1, y=2)$ **είναι ελεύθερο στάσιμο της συνάρτησης** $f(x,y) = x^2y^2 - 8x - 4y$**, και να χαρακτηριστεί.**

Λύση. Το σημείο ικανοποιεί τις εξισώσεις στασιμότητας

$$f(x,y) = x^2y^2 - 8x - 4y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x = 2xy^2 - 8 = 2(1)(2)^2 - 8 = 0 \\ f_y = 2x^2y - 4 = 2(1)^2 2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Για τις δεύτερες παραγώγους, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2xy^2 - 8 \\ f_y = 2x^2y - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{xx} = 2y^2 \ge 0, f_{yy} = 2x^2 \ge 0,\; f_{xy} = 4xy$$

σε όλα τα σημεία

$$\Rightarrow \Delta_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2x^2)(2y^2) - (4xy)^2 = -12x^2y^2 < 0$$

Το σημείο είναι σαγματικό, ειδικότερα δεν είναι ακρότατο.

7

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημό της η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:

$$\tilde{Q} : \{Q = x^2 + y^2 \,|\, L = x + 2y = 0\}$$

Λύση. Η συνάρτηση $Q = x^2 + y^2$ έχει σόλα τα μη μηδενικά σημεία γνήσια θετικές τιμές. Ειδικότερα αυτό ισχύει για τα σημεία της ευθείας του περιορισμού. Επομένως η περιορισμένη τετραγωνική είναι **θετικά ορισμένη**

Παρατήρηση. Στο ίδιο καταλήγουμε αν αντικαταστήσουμε από τον περιορισμό:

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \text{ και } \tilde{Q} = (-2y)^2 + y^2 = 5y^2 > 0 \text{ για } y \ne 0 \Rightarrow x \ne 0$$

Επίσης, η πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα είναι γνήσια αρνητική σύμφωνα με το σχετικό κριτήριο:

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & \alpha & \beta \\ q & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 1 = -2 < 0$$

8

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το (ελεύθερο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = x^2y - 2x - y$**, στη θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\, y \ge 0\}$**.**

Λύση. Οι συνθήκες στασιμότητας μας δίνουν, στη θετική περιοχή, μοναδική λύση:

$$\{f_x = 2xy - 2 = 0,\; f_y = x^2 - 1 = 0\} \Rightarrow \{x = 1, y = 1\}$$

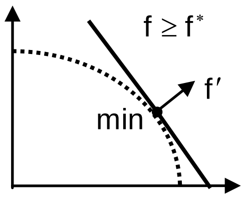
με: $\{f_{xx} = 2y = 2 > 0,\; f_{yy} = 0,\; f_{xy} = 2x = 2\} \Rightarrow \Delta_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2(0) - 2^2 = -4 < 0$

Έχει αρνητική διακρίνουσα και επομένως είναι σαγματικό. Ειδικότερα δεν είναι ακρότατο.

9

Το περιοριζμένο στάσιμο της συνάρτησης $f = x^2 + y^2$ με τον περιορισμό $g = 2x + y = 5$, είναι $(x = 2, y = 1)$. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

Λύση. Ο γραμμικός περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης f και επομένως η λύση δίνει *περιορισμένο γνήσιο ολικό ελάχιστο.* Για τον αναλυτικό χαρακτηρισμό υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης Lagrange:



$$L = f + \lambda(c - g) = x^2 + y^2 + \lambda(5 - 2x - y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_x = 2x - 2\lambda \\ L_y = 2y - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} L_{xx} = 2 & L_{xy} = 0 \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = 2 \end{array}\right\}$$

$$\tilde{H}_L = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_x \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ με } |\tilde{H}_L| = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(4) + 1(-2) = -10 < 0,$$

(αναπτύξαμε ως προς την πρώτη γραμμή)

Είναι αρνητική και επομένως το σημείο χαρακτηρίζεται ως *περιορισμένο γνήσιο τοπικό ελάχιστο*.

Παρατήρηση. Δεν χρειαστήκαμε ούτε το σημείο της λύσης ούτε τον πολλαπλασιαστή. Σε κάθε περίπτωση ο πολλαπλασιαστής μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\lambda = f_x / g_x = 2x/2\big|_{x=2} = 2$$

10

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q = 2x^2 + y^2 - 2xy$, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή: $\tilde{Q} = \{2x^2 + y^2 - 2xy \,\|\, 2x - y = 0\}$, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.

Λύση. Η τετραγωνική μορφή έχει τα χαρακτηριστικά:

$$Q = \alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\beta xy \Rightarrow \{\alpha = 2 > 0,\ \gamma = 1 > 0\},\ \beta = -1, \{\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 2 - 1 = 1 > 0\}$$

Συμπεραίνουμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.

Κάθε περιορισμός της θα είναι επίσης θετικά ορισμένος, και επομένως η δοθείσα περιορισμένη τετραγωνική μορφή θα είναι επίσης θετικά ορισμένη. Οι αντίστοιχοι συμμετρικοί πίνακες είναι:

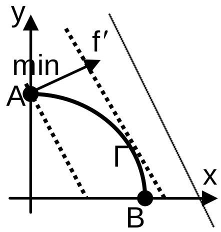
$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{S} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ με } \Delta = |S| = 1 > 0 \text{ και } \tilde{\Delta} = |\tilde{S}| = -2(2-1) - 1(-2+2) = -2 < 0$$

11

Να βρεθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος περιορισμένης βελτιστοποίησης, κάνοντας και το σχετικό γράφημα:

$\min\{2x + y \,\|\, x^2 + y^2 = 5\}$, **στη θετική περιοχή:** $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Λύση. Από το γράφημα διαπιστώνουμε ότι το περιορισμένο στάσιμο Γ δίνει μέγιστο. Το ελάχιστο βρίσκεται σένα από τα δύο σημεία του συνόρου $\{A, B\}$, όπου η αντικειμενική συνάρτηση $f(x, y) = 2x + y$ έχει τις τιμές:



$$A : (x = 0, x^2 + y^2 = 5) \Rightarrow (x = 0, y = \sqrt{5}) \Rightarrow f(A) = 2 \cdot 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$B : (y = 0, x^2 + y^2 = 5) \Rightarrow (x = \sqrt{5}, y = 0) \Rightarrow f(B) = 2\sqrt{5} + 0 = 2\sqrt{5}$$

Επομένως το περιορισμένο ελάχιστο βρίσκεται στο συνοριακό σημείο A.

Εξάλλου οι ισοσταθμικές της αντικειμενικής συνάρτησης έχουν κλίση -2:

$$f(x, y) = 2x + y = c \Rightarrow y = c - 2x$$

οπότε, όπως φαίνεται και στο γράφημα, η μικρότερη ισοσταθμική που τέμνει την καμπύλη του περιορισμού είναι αυτή που διέρχεται από το σημείο A .

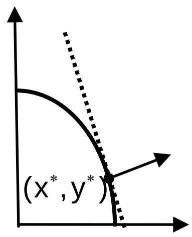
12

Στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ **θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:**

$$\min\{x^2 + y \,\|\, 4x + y = c\} \text{ με } c > 0$$

Να βρεθεί η λύση και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange

Λύση. Γραφικά διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι περιορισμένη στάσιμη. Λύνουμε τις εξισώσεις Lagrange και βρίσκουμε:



$$\left.\begin{array}{l} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 4\lambda \\ 1 = \lambda \\ 4x + y = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{array}\right\} \\ 4 \cdot 2 + y = c \Rightarrow y = c - 8 \end{array}$$

Η λύση είναι: $(x^* = 2, y^* = c - 8, \lambda = 1)$ με $f^*(c) = x^{*2} + y^* = 4 + c - 8 = c - 4$

Επαληθεύουμε ότι ο πολλαπλασιαστής δίνει την παράγωγο της μέγιστης τιμής ως προς την τιμή του περιορισμού: $f^{*\prime}(c) = 1 = \lambda$

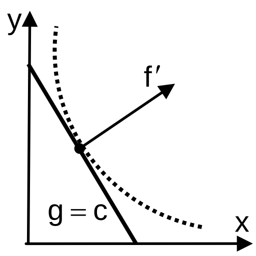
13

Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{f = xy \,\|\, g = 2x + y = c,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Να βρεθεί η λύση, και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange.

<u>Λύση.</u> (βιβλίο 2δ.4, σελ 236)



1. Η λύση είναι εσωτερική και δίνεται από το περιορισμένο στάσιμο, δηλαδή από τις εξισώσεις Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ 2x + y = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ 2\lambda + 2\lambda = c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = c/4 \\ y = c/2 \\ \lambda = c/4 \end{array}\right.$$

Η λύση: $(x^* = c/4,\ y^* = c/2)$, και ο πολλαπλασιαστής: $\lambda = c/4$, εξαρτώνται από την παράμετρο c.

2. Βρίσκουμε και την μέγιστη τιμή της f ως συνάρτησης της παραμέτρου c:

$$f^*(c) = x^* y^* = c^2/8,$$

και επαληθεύουμε ότι η παράγωγός της ισούται με τον πολλαπλασιαστή:

$$f^{*\prime}(c) = c/4 = \lambda(c)$$

▲

14

Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q = -2x^2 - y^2 + xy$ **, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:** $\tilde{Q} = \{-2x^2 - y^2 + xy \,\|\, 2x - y = 0\}$ **, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.**

<u>Λύση</u> Η τετραγωνική μορφή έχει τα χαρακτηριστικά:

$$Q = \alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\beta xy \Rightarrow \begin{cases} \{\alpha = -2 < 0,\ \gamma = -1 < 0\},\ \beta = 1/2 \\ \Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 2 - 1/4 = 7/4 > 0 \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή έχει γνήσια αρνητικές τιμές για όλα τα $(x,y) \neq (0,0)$.

Κάθε περιορισμός της θα είναι επίσης αρνητικά ορισμένος, και επομένως η δοθείσα περιορισμένη τετραγωνική μορφή θα είναι επίσης αρνητικά ορισμένη. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε από τον περιορισμό, βρίσκουμε:

$$\{2x - y = 0:\ y = 2x\} \Rightarrow Q = -2x^2 - (2x)^2 + x(2x) = -4x^2 < 0$$

Οι αντίστοιχοι συμμετρικοί πίνακες είναι:

$$S=\begin{pmatrix}-2 & 1/2\\ 1/2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \Delta=|S|=5/4>0,\ \tilde{S}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1/2\\ -1 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \tilde{\Delta}=|\tilde{S}|=-2(2-1/4)-1(1-2)=11/2>0$$

15

Το πρόβλημα: $\max\{f(x,y)=xy^{1/2}\,\|\,g(x,y)=8x+y=12\}$ **στη θετική περιοχή, έχει την περιορισμένη στάσιμη λύση:** $\{x=1, y=4\}$**. Να βρεθεί η λύση και ο πολλαπλασιαστής Lagrange για το πρόβλημα:**

$$\max\{h(x,y)=2\ln x+\ln y\,\|\,g(x,y)=8x+y=12\}$$

Λύση. Η h είναι αύξουσα συνάρτηση της f:

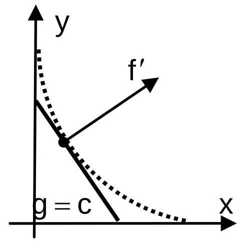
$$2\ln x+\ln y=2\ln xy^{1/2}\Rightarrow h=2\ln f$$

οπότε θα έχει τις ίδιες ισοσταθμικές με την ίδια διάταξη. Εφόσον και ο περιορισμός είναι ίδιος, η λύση θα είναι ίδια: $\{x=1, y=4\}$.

Για τον πολλαπλασιαστή βρίσκουμε:

$$\max\{h(x,y)=2\ln x+\ln y\,\|\,g(x,y)=8x+y=12\}\Rightarrow \lambda=\frac{h_x}{g_x}=\frac{2/x}{8}\Big|_{x=1}=\frac{1}{4}$$

16



Θεωρούμε το πρόβλημα: $\max\{f(x,y)=(x^{1/2}+2y^{1/2})^2\,\|\,g(x,y)=2x+y=18\}$

Να βρεθεί η λύση του και να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής.

Λύση. Η λύση θα είναι ίδια με την λύση του απλούστερου προβλήματος:

$$\max\{h(x,y)=x^{1/2}+2y^{1/2}\,\|\,g(x,y)=2x+y=4\}$$

διότι η κάθε αντικειμενική συνάρτηση είναι γνήσια αύξων μετασχηματισμός της άλλης: $f=h^2 \Leftrightarrow h=\sqrt{f}$

Για το νέο πρόβλημα βρίσκουμε την λύση:

$$\left.\begin{matrix}h_x/g_x=h_y/g_y\\ g=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}1/4x^{1/2}=2/2y^{1/2}\\ 2x+y=18\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}y=16x\\ 2x+16x=18\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x^*=1, y^*=16)$$, με $\lambda=h_x/g_x=1/4$

Υπολογίζουμε και την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1/4 & 0\\ 1 & 0 & -1/128\end{vmatrix}=-2(-2/128)+1(1/4)>0$$

Επομένως η λύση μας δίνει γνήσιο περιορισμένο τοπικό μέγιστο. Από το γράφημα διαπιστώνουμε ότι είναι ολικό.

Ο ζητούμενος πολλαπλασιαστής αφορά το αρχικό πρόβλημα και θα δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_f=\frac{f_x}{g_x}=\frac{2(x^{1/2}+2y^{1/2})/2x^{1/2}}{2}=\frac{(1+2\cdot 4)}{2}=\frac{9}{2}$$

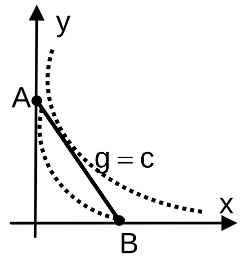
Παρατήρηση. Η λύση μπορεί να βρεθεί και με αντικατάσταση από τον περιορισμό.

17

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος: $\min\{f(x,y)=(x^{1/2}+2y^{1/2})^2\,\|\,g(x,y)=2x+y=4\}$

Λύση. Η λύση θα είναι ίδια με την λύση του απλούστερου προβλήματος:

$$\min\{h(x,y)=x^{1/2}+2y^{1/2}\,\|\,g(x,y)=2x+y=4\}$$



διότι η κάθε αντικειμενική συνάρτηση είναι γνήσια αύξων μετασχηματισμός της άλλης: $f=h^2 \Leftrightarrow h=\sqrt{f}$. Γραφικά (ή όπως στο πρόβλημα 17) διαπιστώνουμε ότι η περιορισμένη στάσιμη λύση δίνει μέγιστο. Επομένως το ελάχιστο θα βρίσκεται σένα από τα δύο σημεία του συνόρου:

$$A:(x=0, y=4)\Rightarrow h_A=4,\quad B:(x=2,\ y=0)\Rightarrow h_B=\sqrt{2}$$

Το ελάχιστο βρίσκεται στο B.

Παρατήρηση. Μπορούμε να το λύσουμε και με αντικατάσταση:

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \Rightarrow \min\{h = x^{1/2} + 2(4-2x)^{1/2} \;||\; 0 \le x \le 2\}$$

Η συνάρτηση είναι κοίλη, και η ελάχιστη τιμή βρίσκεται σε συνοριακό σημείο. Συγκρίνοντας τις τιμές, βρίσκουμε την λύση.

<u>18</u>. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = e^{xy}$.

<u>Λύση.</u> Η f είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση της $h = xy \Rightarrow f = e^h$. Επομένως έχουν το ίδιο στάσιμο, με τον ίδιο χαρακτηρισμό:

$$f(x,y) = xy \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_x = y = 0 \\ f_y = x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x=0, y=0) \text{, στάσιμο}$$

Είναι σαγματικό, όχι ακρότατο, διότι έχει γνήσια αρνητική διακρίνουσα:

$$f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,\ f_{xy} = 1 \Rightarrow \Delta_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (0)(0) - 1^2 = -1 < 0$$

<u>19</u>

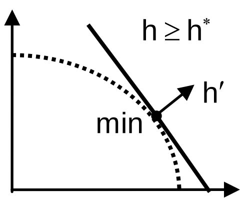
Στον επίπεδο Oxy, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(0,0)$ από τα σημεία της ευθείας $x + 2y = c$.

Λύση. Το σημείο ελάχιστης απόστασης βρίσκεται ως λύση του προβλήματος:

$$\min_{\{x,y\}}\{f = (x^2+y^2)^{1/2} \;||\; g = x + 2y = c\}$$

ή ισοδύναμα, του απλούστερου προβλήματος:

$$\min_{\{x,y\}}\{h = f^2 = x^2 + y^2 \;||\; g = x + 2y = c\}$$



Από την γεωμετρία του προβλήματος ή και γραφικά, διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι εσωτερική, και επομένως αυτή θα είναι η στάσιμη:

$$\left.\begin{matrix} h_x / g_x = h_y / g_y \\ g = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x = 2y/2 \\ x + 2y = c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = 2x \\ x + 4x = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x^* = c/5, y^* = 2c/5)$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι:

$$f = (x^{*2} + y^{*2})^{1/2} = \left(\frac{c^2}{25} + \frac{4c^2}{25}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}\,|c|}{5}$$

<u>20</u>

Το σημείο $\{x=1, y=2\}$ είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = 2x + y$, με τον περιορισμό: $g(x,y) = xy = 2$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, και αναλυτικά και γραφικά

<u>Λύση.</u> Ο πολλαπλασιαστής Lagrange δίνεται από τον λόγο:

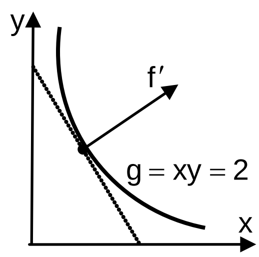
$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{2}{y} = \frac{2}{2} = 1$$

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται:

$$L = f + \lambda(c - g) = 2x + y + (2 - xy) = -xy + 2x + y + 2$$

Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης Lagrange στο σημείο είναι θετικά ορισμένος διότι έχει ορίζουσα αρνητική:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & -1 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} = -yx + x(-y) = -2xy = -4 < 0$$



Επομένως το σημείο είναι **(γνήσιο) περιορισμένο τοπικό ελάχιστο.** Γραφικά διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι γνήσιο περιορισμένο **ολικό** ελάχιστο, διότι ο περιορισμός $g = xy = 2$, βρίσκεται εξολοκλήρου στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης.

▲