Φροντιστήριο.ΙΙ(Β)

1

Οι εξισώσεις: $\{xy = v,\ x + 2y = w\}$ **ορίζουν πλεγμένα τα** $\{x, y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{v, w\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

2

Δίνεται η συνάρτηση $f(v, w) = v^{1/2}w$**. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του** v **ως προς το** w **όταν** $(v = 3, w = 2)$**.**

3

Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση στο $(0,0)$ **της συνάρτησης:** $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

4

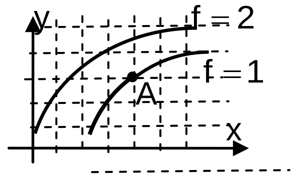
Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ **είναι κοίλη.**

5

Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w = w(z),\ z = z(x, y),\ y = y(x), x = x(t)\}$ **. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.**

6

Η συνάρτηση $f(x, y)$ **έχει τις ισοσταθμικές του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθεί τα πρόσημα των μερικών παραγώγων στο σημείο** A**, και να χαρακτηριστεί η συνάρτηση ως οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.**



7

Να βρεθεί η μερική παράγωγος f_x **της συνάρτησης** $f(x, y) = \max\{2x, y + x\}$

8

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x, y) = x - y^2$**. Να γίνουν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.**

9

Για τον παρακάτω συμμετρικό πίνακα να βρεθεί και να χαρακτηριστεί η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10

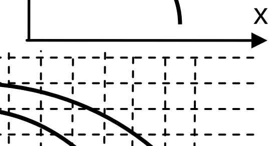
Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x + y = u,\ x^2 - y = v\}$ **ορίζει πλεγμένα τα** $\{x, y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{u, v\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

11

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ **είναι φθίνουσα και οιονεί κοίλη. Να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.**

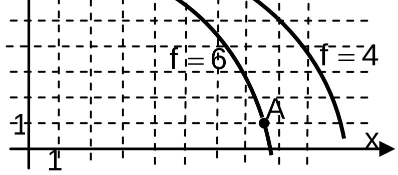
12

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ **είναι** $y -$**φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς** x**, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση οιονεί κυρτή ή οιονεί κοίλη.**



13

Στο γράφημα παραπλεύρως δίνονται δύο ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $f(x, y)$**. Να εκτιμηθεί η μερική παράγωγος** f_y **στο σημείο** A**.**



14

Να σκιαγραφηθεί η ισοσταθμική μιας συνάρτησης $f(x,y)$ **που είναι φθίνουσα και:**

1. οιονεί κοίλη 2. ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y **από το** x

15

Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x+y=u+1,\ x^2-y=v-2\}$ **ορίζει πλεγμένα τα** $\{x,y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{u,v\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** u**, χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.**

16

Να χαρακτηριστούν ως προς το πρόσημό τους οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές. Σε κάθε περίπτωση να δοθεί και ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας:

$$Q_1(x,y)=x^2+xy,\ Q_2(x,y,z)=x^2+xy+z^2$$

17

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x,y)=x^2+xy+x-y$ **. Να βρεθεί το στάσιμο σημείο της και στο σημείο αυτό να υπολογιστούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση.**

18

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $(1+x)^{\alpha}(1+y)^{\beta}$**, στο** $(0,0)$

19

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=-\ln x+y$ **, για** $\{x\geq 0, y\geq 0\}$**. Να βρεθούν και να σκιαγραφηθούν:**

1. Η διανυσματική παράγωγος στο σημείο $(1,2)$

2. Η ισοσταθμική που διέρχεται από το ίδιο σημείο, καθώς και η αντίστοιχη πάνω σταθμική

20

Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w=w(z,t),\ z=z(x,y),\ y=y(x)\}$ **. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.**

21

Η συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι φθίνουσα.**

1. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής και της διανυσματικής παραγώγου

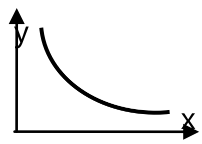
2. Αν είναι και κυρτή να διερευνηθεί αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.

22

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι** $x-$**φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως.**

1. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y

2. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y **από το** x**.**



3. Να γίνει το γράφημα της διανυσματικής παραγώγου.

23

(α). Στην περιοχή: $\{0\leq x<16,\ y\geq 0\}$ **Θεωρούμε την συνάρτηση (Stone-Geary)**

$$f(x,y)=\ln(16-x)+\ln(y)$$

1. Να χαρακτηριστεί η μονοτονία της ως προς $\{x,y\}$

2. Να υπολογιστεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y **ως προς** x**, στο σημείο:** $(x=0,\ y=1\}$

3. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής

24

Να διαπιστωθεί ότι η $f(x,y)=2x^3+y^3$ **είναι κυρτή στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0, y\geq 0\}$

25

Στη θετική περιοχή, να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική και η αντίστοιχη κάτω σταθμική της συνάρτησης: $f(x,y)=\sqrt{x^{3/2}+y^{3/2}}$

▲

Φροντιστήριο.ΙΙ(Β)-Λύσεις

1

Οι εξισώσεις: $\{xy = v,\ x + 2y = w\}$ **ορίζουν πλεγμένα τα** $\{x, y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{v, w\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

Λύση 1. Με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,w) = xy - v = 0 \\ g(x,y,v,w) = x + 2y - w = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_v & f_y \\ g_v & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{2y - x} = \frac{2}{2y - x}$$

Λύση 2. Με πλεγμένη παραγώγιση ως προς v, με σταθερό w:

$$\left.\begin{array}{l} xy = v \\ x + 2y = w \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_v y + x y_v = 1 \\ x_v + 2y_v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_v y + x(-x_v/2) = 1 \\ y_v = -x_v/2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_v y - x_v x = 2 \Rightarrow x_v = \frac{2}{2y - x}$$

Λύση 3. Λύνοντας τις εξισώσεις αλγεβρικά ως προς $\{x, y\}$, επαλείφοντας το y για να βρούμε πρώτα την συνάρτηση: $x = x(v, w)$, την οποία στη συνέχεια παραγωγίζουμε.

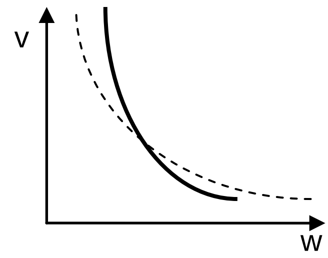
$$\left.\begin{array}{l} xy = v \\ x + 2y = w \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = v/x \\ x + 2y = w \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2(v/x) = w \Rightarrow x^2 - wx + 2v = 0 \Rightarrow x = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 8v}}{2}.$$

2

Δίνεται η συνάρτηση $f(v, w) = v^{1/2} w$**. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του** v **ως προς το** w **όταν** $(v = 3, w = 2)$**.**

Λύση. Η ισοσταθμική έχει την μορφή υπερβολής:

$$v^{1/2} w = c \Rightarrow v = c^2 / w^2$$



Ο ρυθμός υποκατάστασης δίνεται από τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης:

$$\frac{dv}{dw} = -\frac{f_w}{f_v} = -\frac{v^{1/2}}{v^{-1/2} w / 2} = -\frac{2v}{w} = -\frac{2 \cdot 3}{2} = -3$$

Παρατήρηση. Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε την **συνάρτηση υποκατάστασης** που βρήκαμε**:**

$$v = \frac{c^2}{w^2} \Rightarrow \frac{dv}{dw} = -2\frac{c^2}{w^3}, \text{ όπου: } w = 2,\ c = f(3,2) = 3^{1/2} 2$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$\frac{dv}{dw} = -2\frac{c^2}{w^3} = -2\frac{3 \cdot 2^2}{2^3} = -3$$

3

Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση στο $(0,0)$ **της συνάρτησης:** $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

Λύση. Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης και των παραγώγων της στο σημείο $(0,0)$:

$$f_0 = f(0,0) = 1,\ f_x = 1 + y = 1,\ f_y = 1 + x = 1$$

Βρίσκουμε την γραμμική προσέγγιση:

$$f_{\gamma\rho} = f_0 + f_x x + f_y y = 1 + x + y$$

Παρατήρηση. Επειδή είναι πολυωνυμική, μπορούμε εναλλακτικά να αναπτύξουμε σε δυνάμεις των $\{x - 0 = x, y - 0 = y\}$, και να κρατήσουμε μόνο τους όρους μέχρι $1^{ης}$ τάξης:

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy \approx 1 + x + y$$

4

Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **είναι κοίλη.**

Λύση. Υπολογίζουμε τον εσσιανό πίνακα της 2ης παραγώγου. Βρίσκουμε:

$$f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x=x^{-1/2}/2 \\ f_y=y^{-1/2}/2\end{array}\right\}\Rightarrow f''=H_f=\begin{pmatrix} f_{xx}=-x^{-3/2}/4 & f_{xy}=0 \\ f_{yx}=0 & f_{yy}=-y^{-3/2}/4\end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση είναι (γνήσια) κοίλη διότι ο παραπάνω πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος:

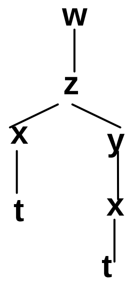
$$f_{xx}=-1/4x^{3/2}<0,\ f_{yy}=-1/4x^{3/2}<0$$

$$\Delta_f=|H_f|=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-1/4x^{3/2})(-1/4y^{3/2})=1/16x^{3/2}y^{3/2}>0$$

5

Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w=w(z),\ z=z(x,y),\ y=y(x),\ x=x(t)\}$ **. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.**

Λύση. $\{w=w(z),\ z=z(x,y),\ y=y(x),\ x=x(t)\}\Rightarrow w=w(x(t),y(x(t)))=w(t)$



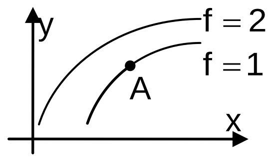
Έχουμε μόνο **μια τελικά ανεξάρτητη** μεταβλητή, την t, με δύο διαδρομές.

Επομένως θα έχουμε έναν τύπο αλυσωτής παραγώγισης για ολική παράγωγο με δύο προσθετικούς όρους:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\quad \textbf{ή}\quad w_t=w_z z_x x_t+w_z z_y y_x x_t$$

6

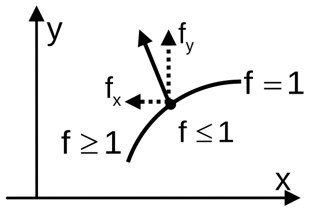
Η συνάρτηση $f(x,y)$ **έχει τις ισοσταθμικές του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθεί τα πρόσημα των μερικών παραγώγων στο σημείο** A**, και να χαρακτηριστεί η συνάρτηση ως οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.**



Λύση.

1. Η διανυσματική κλίση f' δείχνει προς την πάνω σταθμική περιοχή, αριστερά-πάνω, οπότε έχουμε:

$$f_x<0,\ f_y>0$$

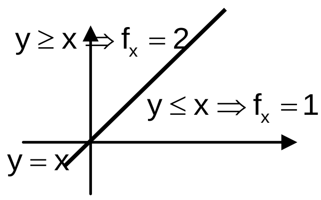


Εξάλλου η τιμή της συνάρτησης αυξάνει από την τιμή 1 στην 2, όταν το x ελαττώνεται ή όταν το y αυξάνει.

2. Η κάτω σταθμική: $f\le 1$ είναι κυρτή, και επομένως η συνάρτηση είναι οιονεί κυρτή. Έχει χαμηλότερες τιμές στα ενδιάμεσα σημεία.

7

Να βρεθεί η μερική παράγωγος f_x **της συνάρτησης** $f(x,y)=\max\{2x,y+x\}$

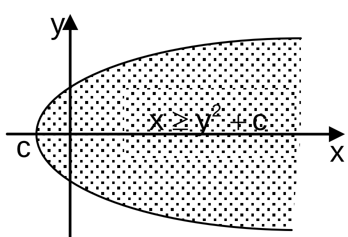


Λύση. Η συνάρτηση είναι τμηματικά ορισμένη:

$$f(x,y)=\max\{2x,y+x\}=\begin{cases}2x & \text{αν } 2x\ge x+y\Rightarrow y\le x\\ x+y & \text{αν } 2x\le x+y\Rightarrow y\ge x\end{cases}\Rightarrow f_x=\begin{cases}2 & \text{αν } y\le x\\ 1 & \text{αν } y\ge x\end{cases}$$

8

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x,y)=x-y^2$**. Να γίνουν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.**



Λύση. Οι ισοσταθμικές είναι πλάγιες παραβολές προς τα δεξιά:

$$f(x,y)=x-y^2=c\Rightarrow x=y^2+c$$

Οι πάνω σταθμικές είναι κυρτές περιοχές διότι δίνονται από τις ανισότητες:

$$f(x,y)=x-y^2\ge c\Rightarrow x\ge y^2+c,$$

προς τα δεξιά της πλάγιας παραβολής. Επομένως είναι οιονεί κοίλη

9

Για τον παρακάτω συμμετρικό πίνακα να βρεθεί και να χαρακτηριστεί η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Με $\{\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \beta = 1\}$ η τετραγωνική μορφή είναι:

$$Q = \alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\beta xy = 0x^2 + 0y^2 + 2xy = 2xy$$

Έχει πρόσημα και γνήσια θετικά και γνήσια αρνητικά, επομένως είναι αόριστη. Εξάλλου ικανοποιεί το κριτήριο:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \text{ή ισοδύναμα:} \quad \Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0\cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$$

10

Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x + y = u,\ x^2 - y = v\}$ **ορίζει πλεγμένα τα** $\{x, y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{u, v\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

Λύση 1. Με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,u,v) &= x + y - u = 0 \\ g(x,y,u,v) &= x^2 - y - v = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_v & f_y \\ g_v & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{-1-2x} = \frac{1}{1+2x}$$

Λύση 2. Με πλεγμένη παραγώγιση ως προς v, με σταθερό u:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= u \\ x^2 - y &= v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_v + y_v &= 0 \\ 2xx_v - y_v &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_v + 2xx_v = 1 \Rightarrow x_v = \frac{1}{1+2x}$$

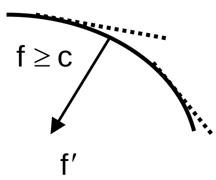
Λύση 3. Λύνοντας τις εξισώσεις αλγεβρικά ως προς $\{x, y\}$ για να βρούμε την συνάρτηση: $x = x(v, w)$, την οποία στη συνέχεια παραγωγίζουμε

$$\left.\begin{aligned} x + y &= u \\ x^2 - y &= v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u &= u - x \\ x^2 - y &= v \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + x - (u + v) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(u+v)}}{2}$$

11

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ **είναι φθίνουσα και οιονεί κοίλη. Να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.**

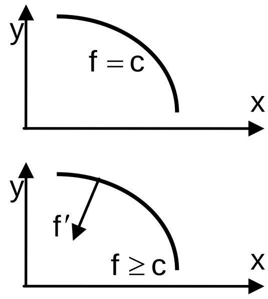
Λύση.



1. Η ισοσταθμική θα έχει αρνητική κλίση διότι η συνάρτηση είναι μονότονη
2. Η πάνω σταθμική βρίσκεται αριστερά –κάτω διότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα, και θα είναι κυρτή περιοχή διότι η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη.
3. Η κλίση της ισοσταθμικής γίνεται πιο απότομη καθώς το x αυξάνει, και επομένως έχουμε αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης

12

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $y-$φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς x, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι οιονεί κυρτή ή οιονεί κοίλη.



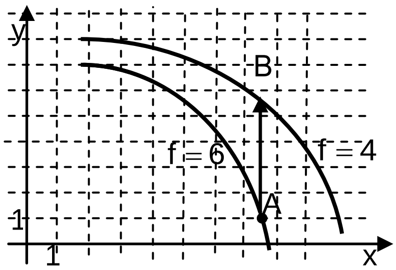
Λύση. Οι ισοσταθμικές έχουν αρνητική κλίση και επομένως οι μερικές παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο, διότι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} < 0 \Rightarrow \frac{f_x}{f_y} > 0$$

Δίνεται $f_y < 0$, οπότε θα έχουμε και $f_x < 0$, δηλαδή η f είναι επίσης $x-$φθίνουσα, όπως φαίνεται και από την κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου στο σχήμα.
Από το σχήμα επίσης διαπιστώνουμε ότι η πάνω σταθμική περιοχή είναι κυρτή και επομένως η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη.

13

Στο γράφημα παραπλεύρως δίνονται δύο ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $f(x,y)$. Να εκτιμηθεί η μερική παράγωγος f_y στο σημείο A.



Λύση. Μεταβάλλοντας μόνο το y, πηγαίνουμε από το σημείο A στο σημείο B, και βρίσκουμε:

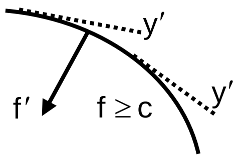
$$\left.\begin{array}{l} \Delta_y f = f(B) - f(A) = 4 - 6 = -2 \\ \Delta y = y_B - y_A \approx 5.5 - 1 = 4.5 \end{array}\right\} \Rightarrow f_y \approx \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \frac{-2}{4.5} = -\frac{20}{45}$$

14

Να σκιαγραφηθεί η ισοσταθμική μιας συνάρτησης $f(x,y)$ που είναι φθίνουσα και:

1. οιονεί κοίλη 2. ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x

Λύση. Η συνάρτηση έχει αρνητικές μερικές παραγώγους: $\{f_x < 0, f_y < 0\}$. Επομένως η ισοσταθμική θα έχει αρνητική κλίση: $y' = -f_x / f_y < 0$. Η διανυσματική παράγωγος κατευθύνεται προς κάτω αριστερά, δείχνοντας την πάνω σταθμική.



1. Αν η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη τότε η πάνω σταθμική θα είναι κυρτή και βρίσκουμε το παραπλεύρως γράφημα.
2. Το ίδιο γράφημα μας δίνει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης, διότι το μέτρο της κλίσης $|y'|$ αυξάνει με το x.

15

Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x + y = u + 1, x^2 - y = v - 2\}$ ορίζει πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{u, v\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς u, χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.

Λύση1. Γράφουμε το σύστημα εξισώσεων στην κανονική μορφή μεταφέροντας όλες τις μεταβλητές στο αριστερό μέρος. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης, υπολογίζοντας τις Ιακωβιανές ορίζουσες:

$$\begin{array}{l} f(x,y,v,w) = x + y - u = 1 \\ g(x,y,v,w) = x^2 - y - v = -2 \end{array} \Rightarrow \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} f_x = 1 & f_y = 1 \\ g_x = 2x & g_y = -1 \end{vmatrix} = -1 - 2x, \quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} f_u = -1 & f_y = 1 \\ g_u = 0 & g_y = -1 \end{vmatrix} = 1$$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)} \Big/ \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{1}{-1-2x} = \dfrac{1}{1+2x}$, είναι η ζητούμενη μερική παράγωγος σε πλεγμένη μορφή.

16

Να χαρακτηριστούν ως προς το πρόσημό τους οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές. Σε κάθε περίπτωση να δοθεί και ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας:

$$Q_1(x,y) = x^2 + xy,\ Q_2(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$$

Λύση. Η τετραγωνική μορφή: Q_1 αντιστοιχεί στον συμμετρικό πίνακα:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ με } \Delta = |S_1| = (1)(0) - (1/2)^2 = -1/4 < 0$$

Συμπεραίνουμε ότι είναι αόριστη, δηλαδή έχει τιμές και γνήσια θετικές και γνήσια αρνητικές. Η τετραγωνική μορφή Q_2, γράφεται:

$$Q_2 = Q_1 + z^2$$

Για $z = 0$ συμπίπτει με την Q_1 οπότε επίσης έχει αμφότερα τα πρόσημα, και επομένως είναι αόριστη. Δίνουμε και τον αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα παραπλεύρως.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x,y) = x^2 + xy + x - y$ **. Να βρεθεί το στάσιμο σημείο της και στο σημείο αυτό να υπολογιστούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση.**

Λύση. Έχει το στάσιμο: $\left.\begin{aligned} f_x &= 2x + y = 0 \\ f_y &= x - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_0 = 1, y_0 = -3)$

Στο σημείο αυτό οι πρώτες παράγωγοι είναι μηδενικές, οπότε η γραμμική προσέγγιση δίνεται από τη σταθερή συνάρτηση:

$$f(1,-3) = -4$$

Η παραβολική προσέγγιση συμπίπτει με την ίδια την συνάρτηση, διότι αυτή είναι παραβολική. Πράγματι έχουμε:

$$\{f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 0\} \Rightarrow f_{\pi\rho} = -4 + [2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+3)] = x^2 + xy + x - y$$

18

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $(1+x)^\alpha(1+y)^\beta$**, στο** $(0,0)$

Λύση

1. Μερικές παράγωγοι: $f(x,y) = (1+x)^\alpha(1+y)^\beta \Rightarrow \begin{cases} f_x = \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta \\ f_y = (1+x)^\alpha \beta(1+y)^{\beta-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(0,0) = \alpha \\ f_y(0,0) = \beta \end{cases}$

2. Γραμμική προσέγγιση: $f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + \alpha x + \beta x$

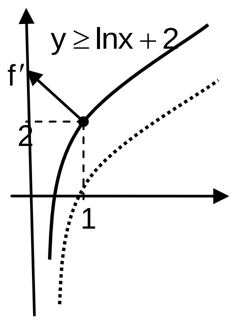
19

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = -\ln x + y$ **, για** $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ **. Να βρεθούν και να σκιαγραφηθούν:**

1. Η διανυσματική παράγωγος στο σημείο $(1,2)$

2. Η ισοσταθμική που διέρχεται από το ίδιο σημείο, καθώς και η αντίστοιχη πάνω σταθμική

Λύση



1. Διανυσματική παράγωγος:

$$\{f_x = -1/x = -1,\ f_y = 1\} \Rightarrow f' = (-1,1)$$, δείχνει αριστερά πάνω

2. Ισοσταθμική: $f(x,y) = f(1,2) \Rightarrow -\ln x + y = 2 \Rightarrow y = \ln x + 2$

Δίνεται από το γράφημα της λογαριθμικής συνάρτησης μετατοπισμένο προς τα πάνω κατά 2 μονάδες.

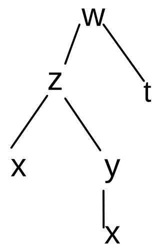
3. Πάνω σταθμική: $f(x,y) \geq f(1,2) \Rightarrow -\ln x + y \geq 2 \Rightarrow y \geq \ln x + 2$

Βρίσκεται πάνω από την ισοσταθμική, στην κατεύθυνση που δείχνει η διανυσματική παράγωγος.

<u>20</u>

Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w = w(z,t),\ z = z(x,y),\ y = y(x)\}$ **. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.**

<u>Λύση</u> $\{w = w(z,t),\ z = z(x,y),\ y = y(x)\} \Rightarrow w = w(z(x,y(x)),t) = w(x,t)$



Έχουμε **δύο** τελικά ανεξάρτητες μεταβλητές:

1. Την x, με δύο διαδρομές και επομένως αλυσωτή μερική παράγωγο με δύο προσθετικούς όρους

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad w_x(x,t) = w_z(z,t)z_x(x,y) + w_z(z,t)z_y(x,y)y'(x)$$

2. Την t, με μια διαδρομή και επομένως αλυσωτή μερική παράγωγο με μόνο έναν προσθετικό όρο:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_x = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_z \quad \text{ή} \quad w_t(x,t) = w_t(z,t)$$

Παρατήρηση. Διακρίνουμε τις δύο **διαφορετικές** συναρτήσεις, την αρχική $w(z,t)$ και την τελική σύνθεση που προκύπτει μετά τις αντικαταστάσεις: $w(x,t)$. Το κοινό σύμβολο w παριστάνει την ίδια εξαρτημένη μεταβλητή. Οι δύο μερικές παράγωγοι είναι ίσες διότι σταθερό x συνεπάγεται σταθερό z

<u>21</u>

Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι φθίνουσα.

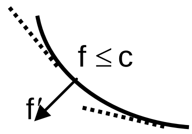
1. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής και της διανυσματικής παραγώγου

2. Αν είναι και κυρτή να διερευνηθεί αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.

<u>Λύση.</u>

1. Η ισοσταθμική θα έχει αρνητική κλίση διότι η συνάρτηση είναι μονότονη

$$f(x,y) = c \Rightarrow y = y(x) \quad \text{με } \{f_x < 0,\ f_y < 0\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} < 0$$



Η διανυσματική παράγωγος $f' = (f_x, f_y)$ θα δείχνει κάτω αριστερά προς την πάνω σταθμική.

2. Εφόσον είναι κυρτή θα είναι και οιονεί κυρτή, δηλαδή η κάτω σταθμική θα είναι κυρτή περιοχή, όπως στο γράφημα παραπλεύρως. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης διότι η κλίση της ισοσταθμικής γίνεται λιγότερο απότομη καθώς το x αυξάνει.

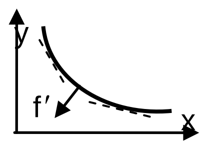
<u>22</u>

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως.

1. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y

2. Να γίνει το γράφημα της διανυσματικής παραγώγου.

3. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.



<u>Λύση</u>

1. Οι ισοσταθμικές: $f(x,y) = c$ έχουν αρνητική κλίση και επομένως οι μερικές παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο, σύμφωνα με τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης.

Δίνεται $f_x < 0$, οπότε θα έχουμε και $f_y < 0$, δηλαδή η f είναι επίσης $y-$φθίνουσα,

2. Η διανυσματική παράγωγος f' δείχνει αριστερά-κάτω όπως στο σχήμα.

3. Από το σχήμα επίσης διαπιστώνουμε ότι καθώς το x αυξάνει η κλίση της ισοσταθμικής είναι φθίνουσα στο μέτρο: $|y'(x)| \downarrow$, και επομένως η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Εξάλλου ικανοποιείται και το αναλυτικό κριτήριο ότι τα $\{y', y''\}$ έχουν αντίθετο πρόσημο: $\{y' < 0,\ y'' > 0\}$.

23

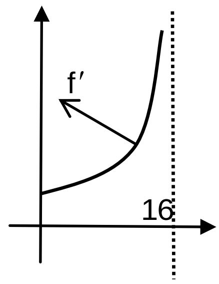
Στην περιοχή: $\{0 \le x < 16,\ y \ge 0\}$ **Θεωρούμε την συνάρτηση (Stone-Geary)**

$$f(x, y) = \ln(16 - x) + \ln(y)$$

1. Να χαρακτηριστεί η μονοτονία της ως προς $\{x, y\}$

2. Να υπολογιστεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y **ως προς** x**, στο σημείο:** $(x = 0,\ y = 1\}$

3. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής



Λύση.

1. $f(x, y) = \ln(16 - x) + \ln(y) \Rightarrow \left\{f_x = -1/(16 - x) < 0,\ f_y = 1/y > 0\right\}$,

$x -$ φθίνουσα, $y -$ αύξουσα

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{-1/(16 - x)}{1/y} = \dfrac{1/16}{1} = 16$, κλίση της ισοσταθμικής

24

Να διαπιστωθεί ότι η $f(x, y) = 2x^3 + y^3$ **είναι κυρτή στη θετική περιοχή**: $\{x \ge 0, y \ge 0\}$

Λύση1. Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

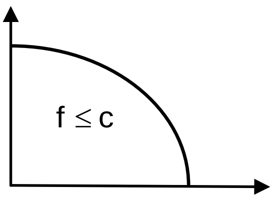
$$\left.\begin{array}{l} f_x = 6x^2 \\ f_y = 3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_{xx} = 12x,\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0,\ f_{yy} = 6y \end{array}\right\},\ \Delta_f = 72xy$$

Στη θετική περιοχή έχουμε $\{f_{xx} \ge 0,\ f_{yy} 0, \ge \Delta_f \ge 0\}$, οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή, γνήσια κυρτή στη γνήσια θετική περιοχή.

Λύση2. Είναι κυρτή στη θετική περιοχή ως άθροισμα των κυρτών συναρτήσεων: $\{2x^3, y^3\}$

25

Στη θετική περιοχή, να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική και η αντίστοιχη κάτω σταθμική της συνάρτησης: $f(x, y) = \sqrt{x^{3/2} + y^{3/2}}$



Λύση. Η συνάρτηση είναι αύξων μετασχηματισμός της συνάρτησης:

$h = x^{3/2} + y^{3/2}$, της γνωστής μορφής: $x^r + y^r$ με $r > 1$

Επομένως θα έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές και σταθμικές όπως στο παραπλεύρως σχήμα .