2013-2014

Μάθημα 8º - 9º

Άσκηση 1η: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1+x^2$. Να βρεθεί η ελαστικότητά της όταν $x=4$. Επίσης: Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της αν το x μεταβληθεί από την αρχική τιμή $x=4$ κατά $\{\%\Delta x=1\%\}$, $\{\%\Delta x=25\%\}$. Να συγκριθεί με την πραγματική ποσοστιαία μεταβολή.

Λύση:

Έχουμε $f(x)=x^2+1$, με $f'(x)=2x$ τότε η ελαστικότητά της είναι:

$$E_x f=\frac{x f'(x)}{f(x)}=\frac{x\cdot 2x}{x^2+1}=\frac{2x^2}{x^2+1}\overset{x=4}{=}\frac{32}{17}>1,\text{ ελαστική}$$

- Εκτίμηση $(\%dx\simeq\%\Delta x,\ \%dy\simeq\%\Delta y)$

$$\frac{\%dy}{\%dx}=E_x f\Leftrightarrow\frac{\%dy}{\%dx}=\frac{32}{17}\Leftrightarrow\%dy=\frac{32}{17}\%dx\overset{\%dx\simeq 1\%}{\Leftrightarrow}$$

$$\%dy=\frac{32}{17}\cdot 1\%\Leftrightarrow\%dy=1{,}88\%$$

- Πραγματική

$$\%\Delta x=\frac{\Delta x}{x}\cdot 100=1\%\Leftrightarrow\frac{\Delta x}{x}=0{,}01\overset{x=4}{\Leftrightarrow}\Delta x=0{,}04$$

Βρίσκουμε την εξίσωση μεταβολών της f:

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=$$

$$= (x+\Delta x)^2+1-(x^2+1) = \cancel{x^2}+(\Delta x)^2+2x\Delta x+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}=$$

$$= (\Delta x)^2+2x(\Delta x) \overset{\Delta x=0{,}04}{\underset{x=4}{=\!=}} (0{,}04)^2+2\cdot 4\cdot 0{,}04 = 0{,}3216$$

οπότε $\quad \% \Delta y = \dfrac{\Delta y}{y}\cdot 100 = \dfrac{0{,}3216}{17}\cdot 100 = 1{,}891\%$

άρα $\quad \% \Delta y \geq \% dy$

Άσκηση 2η: Να βρεθεί συνάρτηση $y=y(x)$ σταθερής ελαστικότητας $\varepsilon=\frac{2}{3}$, με τιμή $y_0=4$, όταν $x_0=3$.

Λύση:

Επειδή η $y=y(x)$ είναι συνάρτηση σταθερής ελαστικότητας $\varepsilon=\frac{2}{3}$ τότε θα είναι της μορφής

$$y=cx^{\varepsilon}=cx^{\frac{2}{3}} \quad \text{τότε} \quad y_0=cx_0^{2/3} \Leftrightarrow 4=c\cdot 3^{2/3} \Leftrightarrow$$

$$c=4\cdot 3^{-2/3}$$

οπότε $\quad y=4\cdot 3^{-2/3}\cdot x^{\frac{2}{3}}$

Άσκηση 3η: Δίνεται η εξίσωση $y=2\cdot x^{3/2}$. Να εκτιμηθεί σε τι ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί το x από την τιμή $x=100$ ώστε το y να ελαττωθεί κατά 1%.

Λύση:

Έχουμε $y = 2 \cdot x^{3/2}$

Αφού η y είναι συνάρτηση σταθερής ελαστικότητας τότε $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Οπότε $\varepsilon = \frac{\%dy}{\%dx} \overset{\%dy \simeq \%\Delta y = -1\%}{\Leftrightarrow} \frac{3}{2} = \frac{-1}{\%dx} \Leftrightarrow$

$\%dx = -\frac{2}{3} \overset{\%dx \simeq \%\Delta x}{\Leftrightarrow} \%\Delta x = -\frac{2}{3}\% \Leftrightarrow$

$\frac{\Delta x}{x} \cdot 100 = -\frac{2}{3} \overset{x=100}{\Leftrightarrow} \Delta x = -\frac{2}{3} \simeq -0{,}67$

Άσκηση 4η: Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$, να γίνει το γράφημα στη θετική περιοχή και να βρεθούν γραφικά και αναλυτικά τα σημεία ισοελαστικότητας, ελαστικότητας και ανελαστικότητας.

Λύση:

- $y = 2x+1$, με $y' = 2$

$\varepsilon = E_x y = \frac{xy'}{y} = \frac{2x}{2x+1}$

- Για να βρούμε τα σημεία ισοελαστικότητας, θα πρέπει να ισχύει:

$|\varepsilon| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{2x+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2x|}{|2x+1|} = 1 \Leftrightarrow |2x| = |2x+1| \Leftrightarrow$

$2x = 2x+1$, αδύνατη ή $2x = -2x-1 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

- Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

$|\varepsilon| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{2x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{2x}{2x+1} < 1$

- $\frac{2x}{2x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2x-1}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

• $\dfrac{2x}{2x+1} > -1 \iff \dfrac{2x}{2x+1} + 1 > 0 \iff \dfrac{2x+2x+1}{2x+1} > 0 \iff$

$\dfrac{4x+1}{2x+1} > 0 \iff (2x+1)(4x+1) > 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$ ή $x > -\dfrac{1}{4}$

άρα $|\varepsilon| < 1 \iff x > -\dfrac{1}{4}$

• Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$|\varepsilon| > 1 \iff \left|\dfrac{2x}{2x+1}\right| > 1 \iff \dfrac{2x}{2x+1} > 1$ ή $\dfrac{2x}{2x+1} < -1$

• $\dfrac{2x}{2x+1} > 1 \iff \dfrac{2x}{2x+1} - 1 > 0 \iff \dfrac{2x-2x-1}{2x+1} > 0 \iff$

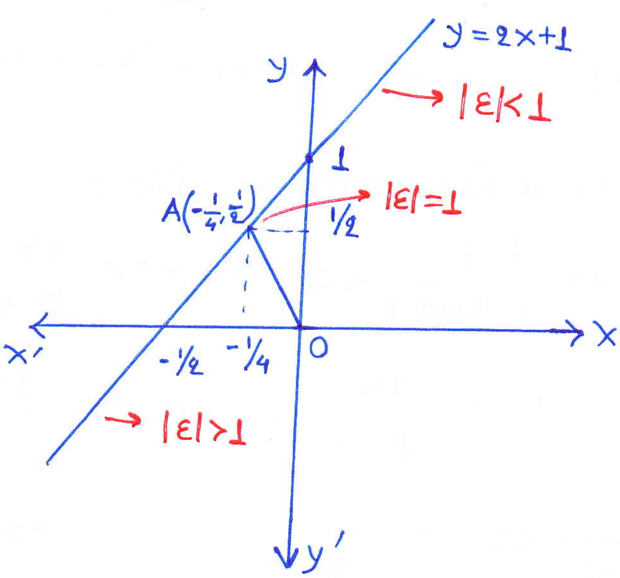
$-\dfrac{1}{2x+1} > 0 \iff \dfrac{1}{2x+1} < 0 \iff 2x+1 < 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$

• $\dfrac{2x}{2x+1} < -1 \iff \dfrac{2x}{2x+1} + 1 < 0 \iff \dfrac{2x+2x+1}{2x+1} < 0 \iff$

$\dfrac{4x+1}{2x+1} < 0 \iff (2x+1)(4x+1) < 0 \iff x \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

άρα $|\varepsilon| > 1 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Γραφικά:



x	0	-1/2
y	1	0

- $y = 1-2x \quad , \quad y' = -2$

$$\varepsilon = E_x y = \frac{xy'}{y} = \frac{-2x}{1-2x}$$

- Για να βρούμε τα σημεία ισοελαστικότητας, θα πρέπει να ισχύει:

$$|\varepsilon| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{1-2x}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2x|}{|1-2x|} = 1 \Leftrightarrow |2x| = |1-2x| \Leftrightarrow$$

$2x = 1-2x$ ή $2x = 2x-1$, αδύνατη

$4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

- Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{1-2x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{-2x}{1-2x} < 1$$

- $\frac{-2x}{1-2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{1-2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1+2x}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

- $\frac{-2x}{1-2x} > -1 \Leftrightarrow \frac{-2x+1-2x}{1-2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+1}{1-2x} > 0 \Leftrightarrow$

$(1-2x)(-4x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

άρα $|\varepsilon| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

- Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{1-2x}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{1-2x} > 1 \text{ ή } \frac{-2x}{1-2x} < -1$$

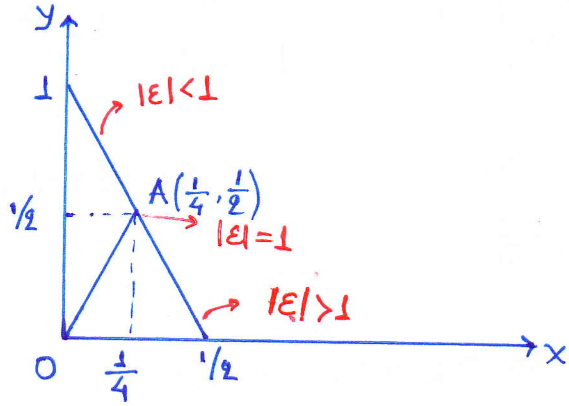
- $\frac{-2x}{1-2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{-2x-1+2x}{1-2x} > 0 \Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

• $\frac{-2x}{1-2x} < -1 \Leftrightarrow \frac{-2x+1-2x}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+1}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow$

$(-4x+1)(1-2x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

άρα $|\varepsilon| > 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Γραφικά:



x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	0

• $y = 1 + x^2 \quad , \quad y' = 2x$

$\varepsilon = E_x y = \frac{xy'}{y} = \frac{2x^2}{1+x^2}$

• Για να βρούμε τα σημεία ισοελαστικότητας θα πρέπει να ισχύει:

$|\varepsilon| = 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow \underset{\text{δεκτή}}{x = 1}$ ή $\underset{\text{απορ.}}{x = -1}$

• Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

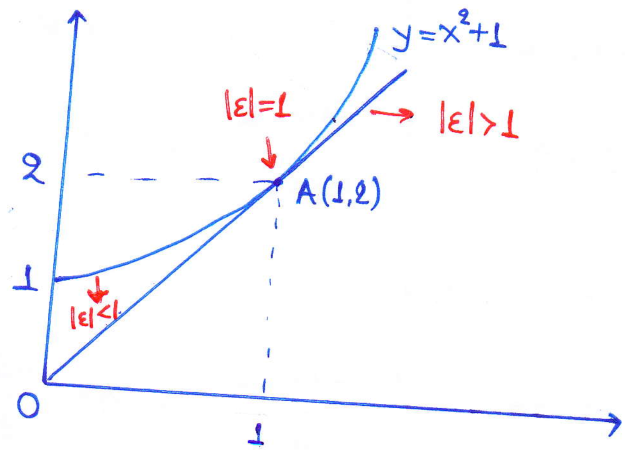
$|\varepsilon| < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon < 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 2x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$x^2 < 1 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq x < 1$

• Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$|\varepsilon| > 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 > x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$x^2 > 1 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x > 1$



Άσκηση 5η: Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, να γίνει το γράφημα στη θετική περιοχή και να βρεθούν γραφικά και αναλυτικά τα σημεία ισοελαστικότητας, ελαστικότητας και ανελαστικότητας του y προς x, καθώς και του x ως προς y.

Λύση:

- $2x+3y=8 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ (1)

Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x.

$$2x+3y(x)=8 \Leftrightarrow 2+3y'=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{2}{3}$$

οπότε $\varepsilon = E_x y = \dfrac{xy'}{y} = \dfrac{-\frac{2}{3}x}{-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} = \dfrac{-2x}{-2x+8}$

- Για να βρούμε τα σημεία ισοελαστικότητας, θα πρέπει να ισχύει:

$$|\varepsilon|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{-2x+8}\right| = 1 \Leftrightarrow |2x| = |-2x+8| \Leftrightarrow$$

$2x=-2x+8 \Leftrightarrow 4x=8$ ή $2x=2x-8$, αδύνατη

$\Leftrightarrow x=2 \overset{(1)}{\rightarrow} y=\frac{4}{3}$

- Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

$|\varepsilon|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{-2x+8}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{-2x}{-2x+8}<1$

- $\frac{-2x}{-2x+8}<1 \Leftrightarrow \frac{-2x+2x-8}{-2x+8}<0 \Leftrightarrow \frac{-8}{-2x+8}<0 \Leftrightarrow$

$-2x+8>0 \Leftrightarrow x<4$

- $\frac{-2x}{-2x+8}>-1 \Leftrightarrow \frac{-2x-2x+8}{-2x+8}>0 \Leftrightarrow \frac{-4x+8}{-2x+8}>0 \Leftrightarrow$

$(-4x+8)(-2x+8)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

οπότε $|\varepsilon|<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)$

- Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$|\varepsilon|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2x}{-2x+8}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2x+8}>1$ ή $\frac{-2x}{-2x+8}<-1$

- $\frac{-2x}{-2x+8}>1 \Leftrightarrow \frac{-2x+2x-8}{-2x+8}>0 \Leftrightarrow \frac{-8}{-2x+8}>0 \Leftrightarrow$

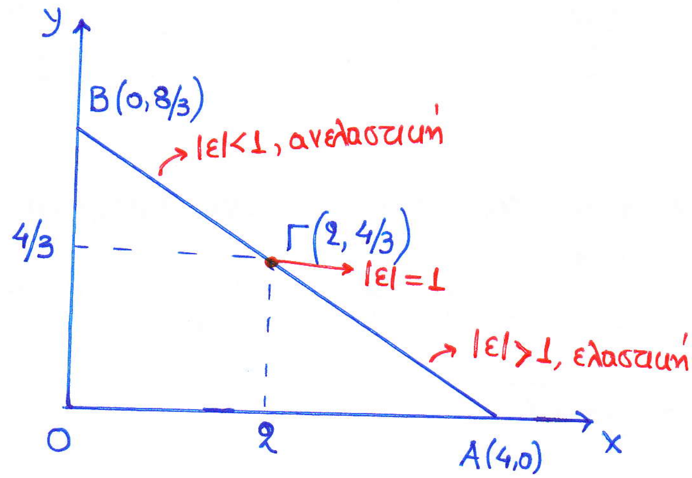
$-2x+8<0 \Leftrightarrow x>4$

- $\frac{-2x}{-2x+8}<-1 \Leftrightarrow \frac{-2x-2x+8}{-2x+8}<0 \Leftrightarrow \frac{-4x+8}{-2x+8}<0 \Leftrightarrow$

$(-4x+8)(-2x+8)<0 \Leftrightarrow x\in(2,4)$

άρα $|\varepsilon|>1 \Leftrightarrow x\in(2,4)\cup(4,+\infty)$

Γραφικά:



x	0	4
y	$\frac{8}{3}$	0

Σημείωση: Πάντα σε μια γραμμική συνάρτηση το σημείο ισοελαστικότητας είναι το μέσο του AB (το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες). Γεωμετρικά, βρίσκεται στο σημείο όπου η ακτίνα και η εφαπτομένη έχουν την ίδια απόλυτη κλίση.

- $E_y x = \dfrac{1}{E_x y} = \dfrac{-2x+8}{-2x}$

  - $|E_y x| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|E_x y|} = 1 \Leftrightarrow |E_x y| = 1 \Leftrightarrow x = 2$

  - $|E_y x| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|E_x y|} < 1 \Leftrightarrow |E_x y| > 1 \Leftrightarrow$
    $x \in (2,4) \cup (4,+\infty)$

  - $|E_y x| > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|E_x y|} > 1 \Leftrightarrow |E_x y| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

- $y = \sqrt{x-2}$, $x \in [2,+\infty)$ με $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$\varepsilon = E_x y = \frac{x y'}{y} = \frac{x \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} = \frac{x}{2(x-2)}$$

- Για να βρούμε τα σημεία ισοελαστικότητας, πρέπει:

$$|\varepsilon| = 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2(x-2)} = 1 \Leftrightarrow x = 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \rightarrow y = \sqrt{2}$$

- Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

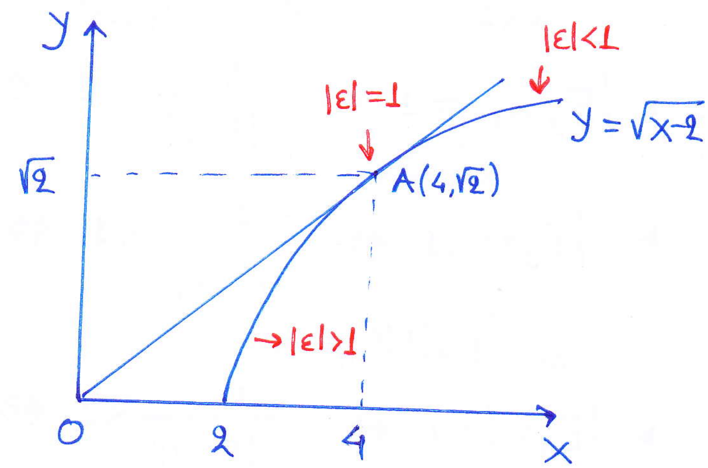
$$|\varepsilon| < 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2(x-2)} < 1 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} x < 2x-4 \Leftrightarrow x > 4$$

- Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| > 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2(x-2)} > 1 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} x > 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x<4 \\ x>2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < x < 4$$

- Γραφικά:



- $|E_y x| = 1 \Leftrightarrow |E_x y| = 1 \Leftrightarrow x = 4$
- $|E_y x| < 1 \Leftrightarrow |E_x y| > 1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$
- $|E_y x| > 1 \Leftrightarrow |E_x y| < 1 \Leftrightarrow x \in (4,+\infty)$

- $x^{1/4} y^{3/4} = 1$

Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{4} x^{-3/4} y^{3/4} + \frac{3}{4} x^{1/4} y^{-1/4} \cdot y' = 0 \Leftrightarrow$$

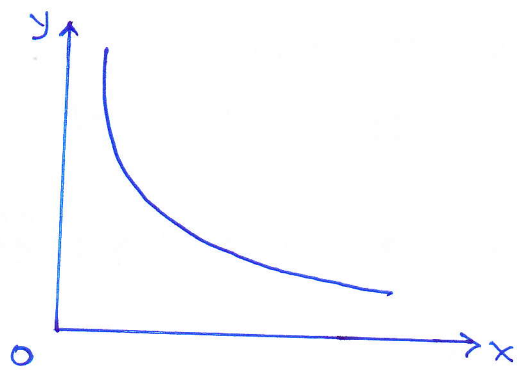
$$\frac{3}{4} x^{1/4} y^{-1/4} y' = -\frac{1}{4} x^{-3/4} y^{3/4} \Leftrightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x^{-3/4} y^{3/4}}{x^{1/4} y^{-1/4}} = -\frac{1}{3} \frac{y}{x}$$

οπότε $\varepsilon = E_x y = \dfrac{x y'}{y} = \dfrac{x\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{y}{x}}{y} = -\dfrac{1}{3}$

άρα $|\varepsilon| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow E_y x = 3 > 1$

επομένως όλα τα σημεία της καμπύλης είναι ανελαστικά.



- $x^3 + y^3 = 9$

Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, οπότε έχουμε:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0 \Leftrightarrow 3y^2 y' = -3x^2 \Leftrightarrow y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

οπότε $\varepsilon = E_x y = \dfrac{x y'}{y} = \dfrac{x\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)}{y} = -\dfrac{x^3}{y^3} = -\dfrac{x^3}{9-x^3}$

Τα σημεία ισοελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| = 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon = -1 \Leftrightarrow -\frac{x^3}{9-x^3} = -1 \Leftrightarrow x^3 = 9 - x^3 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \sim y = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$$

Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon > -1 \Leftrightarrow -\frac{x^3}{9-x^3} > -1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{9-x^3} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

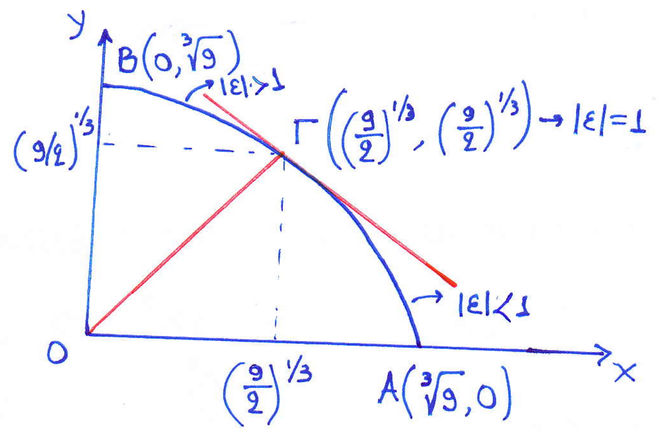
$$\frac{x^3 - 9 + x^3}{9-x^3} < 0 \Leftrightarrow (2x^3-9)(9-x^3) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, 9^{1/3}\right)$$

x	$-\infty$		$\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$		$9^{1/3}$		$+\infty$
$2x^3-9$		$-$	0	$+$		$+$	
$9-x^3$		$-$		$-$	0	$+$	
γιν.		$+$	0	$-$	0	$+$	

Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| > 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon < -1 \Leftrightarrow -\frac{x^3}{9-x^3} < -1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{9-x^3} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3-9}{9-x^3} > 0 \Leftrightarrow (2x^3-9)(9-x^3) > 0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x \in \left[0, \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}\right)$$



Ομοίως με πριν $|E_y x| = 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$

$|E_y x| > 1 \Leftrightarrow x \in \left(\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}, \sqrt[3]{9}\right)$

$|E_y x| < 1 \Leftrightarrow x \in \left[0, \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}\right)$

- $x^{1/3} + y^{1/3} = 3$

Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{3} y^{-2/3} y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} y^{-2/3} y' = -\frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$y' = -\frac{x^{-2/3}}{y^{-2/3}} = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$$

επομένως έχουμε:

$$\varepsilon = E_x y = \frac{x y'}{y} = \frac{x \cdot \left(-\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}\right)}{y} = -\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}} = -\frac{x^{1/3}}{3-x^{1/3}}$$

Τα σημεία ισοελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| = 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon = -1 \Leftrightarrow -\frac{x^{1/3}}{3-x^{1/3}} = -1 \Leftrightarrow x^{1/3} = 3 - x^{1/3} \Leftrightarrow$$

$$2x^{1/3} = 3 \Leftrightarrow x^{1/3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{27}{8} \rightarrow y = \frac{27}{8}$$

Τα σημεία ανελαστικότητας είναι:

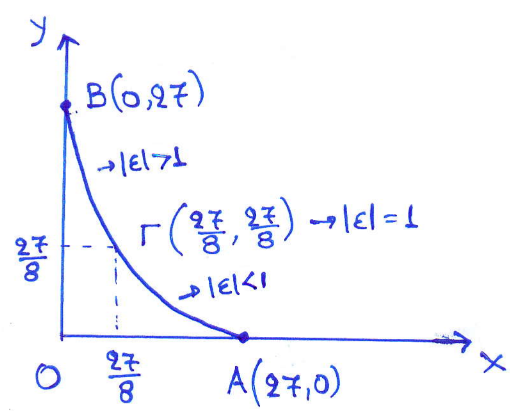
$$|\varepsilon| < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon > -1 \Leftrightarrow -\frac{x^{1/3}}{3-x^{1/3}} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^{1/3} - 3}{3 - x^{1/3}} < 0 \Leftrightarrow (2x^{1/3} - 3)(3 - x^{1/3}) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{27}{8}, 27\right)$$

Τα σημεία ελαστικότητας είναι:

$$|\varepsilon| > 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon < -1 \Leftrightarrow -\frac{x^{1/3}}{3-x^{1/3}} < -1 \Leftrightarrow \frac{2x^{1/3} - 3}{3 - x^{1/3}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x^{1/3} - 3)(-x^{1/3} + 3) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{27}{8}\right)$$



Ομοίως, με πριν: $|E_y x| = 1 \Leftrightarrow x = \frac{27}{8}$

$$|E_y x| < 1 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{27}{8}\right)$$

$$|E_y x| > 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{27}{8}, 27\right)$$

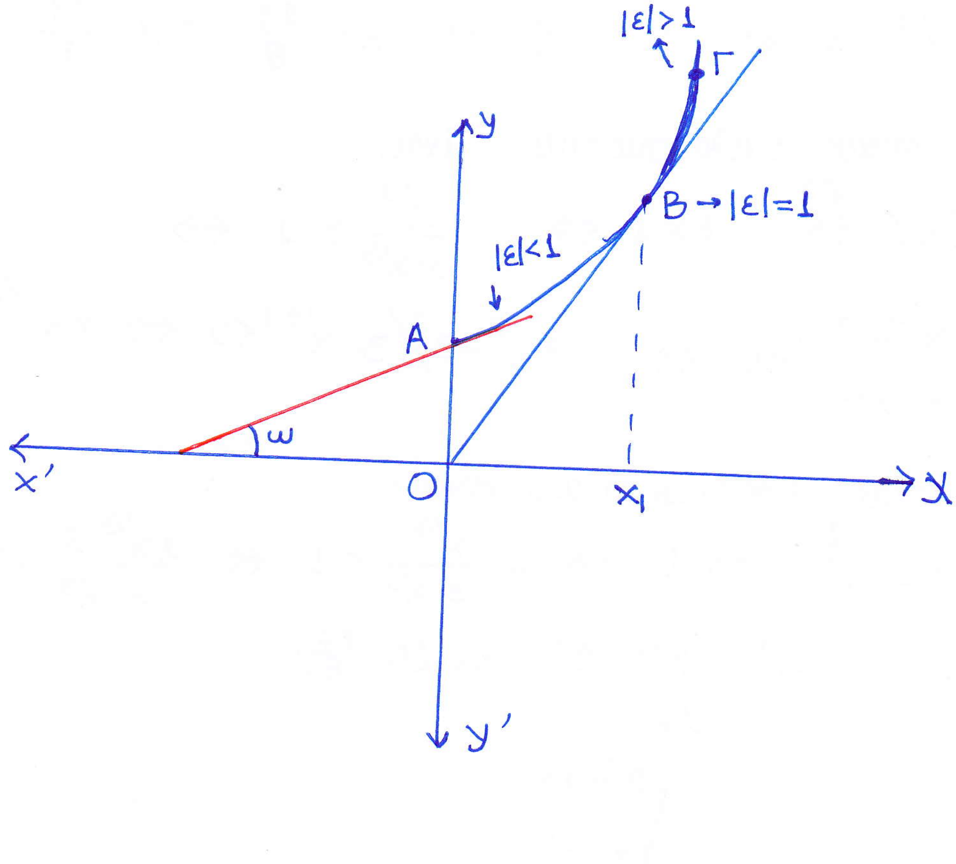
Άσκηση 6η: Για κάθε μία από τις συναρτήσεις $f(x)$ με τα παρακάτω γραφήματα, να βρεθούν τα σημεία ισοελαστικότητας, ελαστικότητας και ανελαστικότητας. Επίσης, να γίνουν τα γραφήματα της μέσης τιμής και του οριακού ρυθμού:

$$Af(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad Mf(x) = f'(x)$$

στο σύστημα συντεταγμένων.

Λύση:

▶



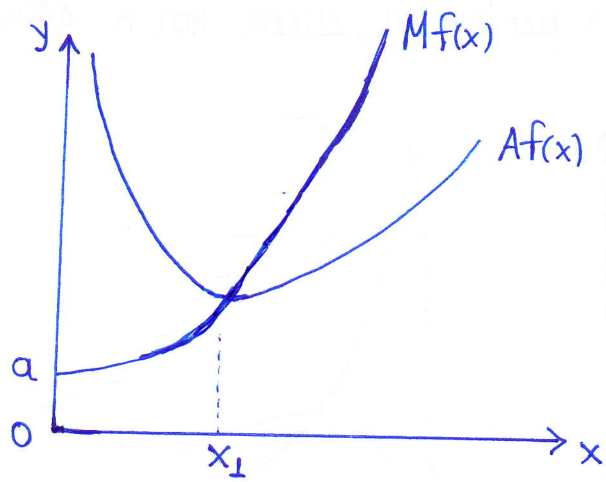
$Af(x) = \frac{f(x)}{x}$: συμπίπτει με την κλίση της ακτίνας

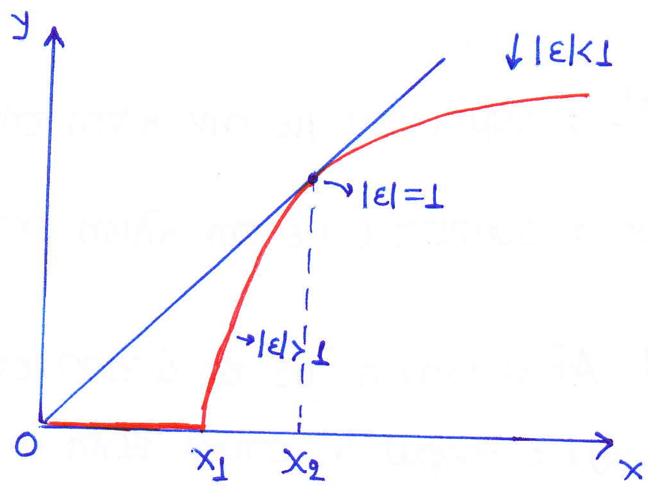
$Mf(x) = f'(x)$: συμπίπτει με την κλίση της εφαπτομένης

Σημείο Α: Η $Af(x)$ ισούται με το άπειρο επειδή $x=0$.
Η $Mf(x)=a$, όπου $a=$ εφω η οποία είναι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x=0$.

Α→Β: Η κλίση της ακτίνας μικραίνει μέχρι το σημείο Β στο οποίο έχει ελάχιστο (σημείο ισοελαστικότητας). Η οριακή τιμή αυξάνεται συνεχώς, αρχίζοντας από το a και διέρχεται από το ελάχιστο της $Af(x)$ (σημείο ισοελαστικότητας)

Β→Γ: Η $Af(x)$ από το Β και μετά αυξάνεται συνεχώς, όπως και η $Mf(x)$.





$0 \le x \le x_1$: Έχουμε $Af(x) = Mf(x) = 0$, αφού $f(x) = 0$

$x = x_1$: Η $Mf(x)$ απειρίζεται αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x = x_1$ είναι κατακόρυφη.

$x_1 < x \le x_2$: Η $Mf(x)$ μειώνεται αφού η f είναι κοίλη και η $Af(x)$ αυξάνεται μέχρι το σημείο x_2 η οποία έχει μέγιστο. (σημείο ισοελαστικότητας)

$x > x_2$: Η $Mf(x)$ μειώνεται, όπως και η $Af(x)$.