Παράγωγος-Κλίση-Μονοτονία

Άσκηση 1η: Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$2^x,\ \log_{10} x,\ \sqrt{\ln(x^{2)}},\ e^{\sqrt{x}},\ x^x$$

Λύση: ▹ Έχουμε $f(x)=2^x=e^{\ln 2^x}=e^{x\ln 2}, x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=(e^{x\ln 2})'=e^{\ln 2}\cdot(x\ln 2)'=2^x\cdot\ln 2=\ln 2\cdot 2^x, x\in\mathbb{R}$

Γενικά ισχύει: $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$, με $0<a\neq 1$

▹ Έχουμε $f(x)=\log_{10} x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}, x>0$

$f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\ln 10}\right)'=\dfrac{1}{\ln 10}(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln 10\cdot x}, x>0$

τύπος αλλαγής βάσης: $\log_a \beta=\dfrac{\ln \beta}{\ln a}$

Γενικά ισχύει : $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{\ln a\cdot x}, x>0, 0<a\neq 1$

▹ Έχουμε $f(x)=\sqrt{\ln\left(x^2\right)}, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$$f'(x)=\left(\sqrt{\ln(x^2)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2)}}\cdot\left(\ln(x^2)\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2)}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(x^2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2)}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{\ln(x^2)}}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

▹ Έχουμε $f(x)=e^{\sqrt{x}}, x\geq 0$ με $f'(x)=\left(e^{\sqrt{x}}\right)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}, x>0$

▹ Έχουμε $f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}, x>0$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(x\ln x\right)'=x^x\cdot\left((x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'\right)=x^x\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^x\cdot(\ln x+1)=(\ln x+1)\cdot x^x, x>0$$

Άσκηση 2η: Θεωρούμε την εξίσωση $y=1+x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση μεταβολών και να υπολογιστεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το x από την τιμή $x=4$ ώστε η τιμή της συνάρτησης να ελαττωθεί κατά 1. Να επαναληφθεί για την εξίσωση $y=\ln x$.

Λύση: ▷ $y=f(x)=x^2+1, x\in\Re$

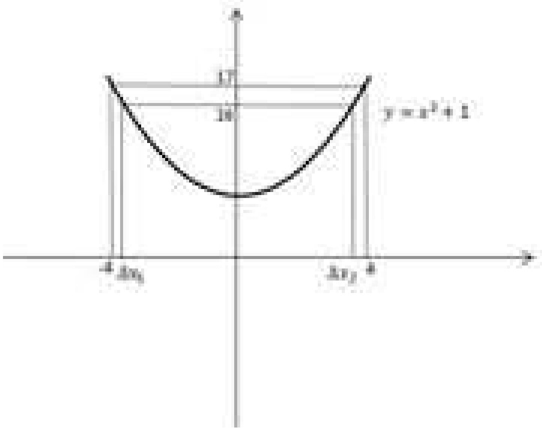
Αρχικά, βρίσκουμε την εξίσωση μεταβολών , οπότε έχουμε:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2+1-(x^2+1)=x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+1-x^2-1=(\Delta x)^2+2x(\Delta x) \quad \textbf{(1)}$$

Για αρχική τιμή $x=4$, ζητάμε πόσο θα είναι η μεταβολή του x (δηλαδή Δx) ώστε η συνάρτηση να ελαττωθεί κατά 1,δηλαδή $\Delta y=-1$.Οπότε από την **(1)** έχουμε:

$$\Delta y=(\Delta x)^2+2x(\Delta x)\Leftrightarrow -1=(\Delta x)^2+2\cdot 4\cdot(\Delta x)\Leftrightarrow (\Delta x)^2+8(\Delta x)-1=0$$

με διακρίνουσα $\Delta=8^2-4\cdot 1\cdot(-1)=60>0$ και με ρίζες τις $(\Delta x)_{1,2}=\dfrac{-8\pm 2\sqrt{15}}{2}=-4\pm\sqrt{15}$



- Για $x=4$,έχουμε $f(4)=17$,άρα το y από 17 γίνεται 16,οπότε έχουμε:

  $x+\Delta x_1=4-4-\sqrt{15}=-\sqrt{15}$,απορρίπτεται

  $x+\Delta x_2=4-4+\sqrt{15}=\sqrt{15}$,δεκτή

▷ Έχουμε $y=f(x)=\ln x, x>0$

Αρχικά, βρίσκουμε την εξίσωση μεταβολών, οπότε έχουμε:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(\frac{4+\Delta x}{4}\right)\overset{\Delta y=-1}{\underset{x=4}{\Rightarrow}}$$

$$-1=\ln\left(\frac{4+\Delta x}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{4+\Delta x}{4}=e^{-1}\Leftrightarrow 4+\Delta x=\frac{4}{e}\Leftrightarrow \Delta x+\frac{4}{e}-4$$

Άρα $x+\Delta x = 4+\frac{4}{e}-4=\frac{4}{e}$

Άσκηση 3η: Να επαληθευτεί ο κανόνας αλυσωτής παραγώγισης για τις παρακάτω συνθέσεις:

Λύση: $\{f(x)=\ln x, g(x)=e^x\}$

$(\Rightarrow)$ Βρίσκουμε την $f(g(x))$ και στη συνέχεια την παράγωγό της, οπότε έχουμε:

$f(g(x)) = f(e^x) = \ln e^x = x\ln e = x$

Άρα $(f(g(x)))' = (x)' = 1$

$(\Leftarrow)$ Εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης ,οπότε έχουμε:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x) = f'(e^x)\cdot(e^x)' = \frac{1}{e^x}\cdot e^x = 1$$

αφού $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

▹ $\{z=\ln y, y = x^2+1\}$

$z = z(y) = z(y(x)) = z(x)$

$(\Rightarrow)$ Βρίσκουμε την $z(y(x))$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγό της, οπότε

Έχουμε $z(x) = z(y(x)) = z(x^2+1) = \ln(x^2+1)$

Άρα $\frac{dz}{dx} = (\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$

$(\Leftarrow)$ Εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης, οπότε έχουμε:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

▹ $\{z=\ln y, y=x^2, x=2t+1\}$

Έχουμε $z = z(y) = z(y(x)) = z(y(x(t))) = z(t)$

$(\Rightarrow)$ Βρίσκουμε την $z(y(x(t))) = z(t)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγό της, οπότε, έχουμε:

$z(t) = z(y(x(t))) = z(y(2t+1)) = z((2t+1)^2) = \ln(2t+1)^2$

Άρα $\frac{dz}{dt}=(\ln(2t+1)^2)'=\frac{1}{(2t+1)^2}\cdot((2t+1)^2)'=\frac{1}{(2t+1)^2}\cdot 2(2t+1)\cdot(2t+1)'=\frac{4(2t+1)}{(2t+1)^2}=\frac{4}{2t+1}$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης, οπότε έχουμε:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{y}\cdot 2x\cdot 2=\frac{4x}{y}=\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}=\frac{4}{2t+1}$$

αφού $\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y},\frac{dy}{dx}=2x,\frac{dx}{dt}=2$

Άσκηση 4^{η}: Να υπολογιστεί το βήμα ασυνέχειας της παραγώγου για τις συναρτήσεις:

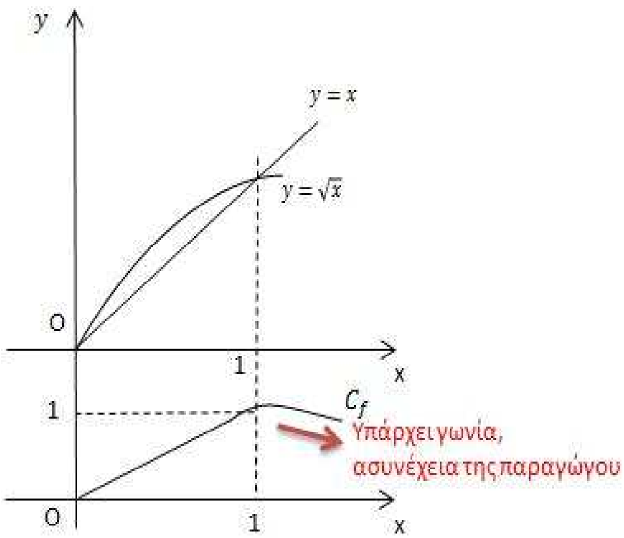
$$\min\left\{x,\sqrt{x}\right\},\max\left\{x,\sqrt{x}\right\}$$

Λύση: ▹ Έχουμε $f(x)=\min\left\{x,\sqrt{x}\right\}, x\in[0,+\infty)$

- $x\geq\sqrt{x}\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x^2\geq x\Leftrightarrow x^2-x\geq 0\Leftrightarrow x(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ ή $x\geq 1\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x\geq 1$
- $x\leq\sqrt{x}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$

οπότε ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}x, 0\leq x<1\\ \sqrt{x}, \quad x\geq 1\end{cases}$$



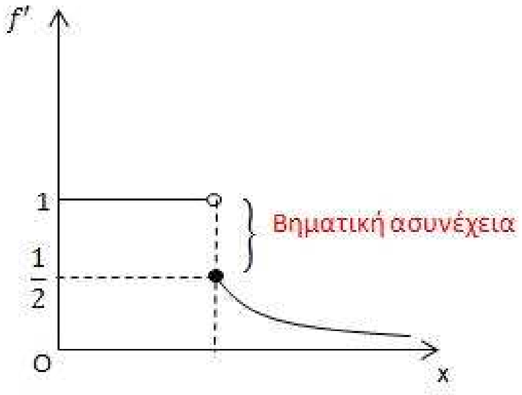
Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\ge 1\end{cases}$$

Η βηματική ασυνέχεια της παραγώγου είναι:

$$f'(x_0^+)-f'(x_0^-)=f'(1^+)-f'(1^-)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)-\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\neq 0$$

οπότε η f' εμφανίζει στο $x_0=1$ βηματική ασυνέχεια.

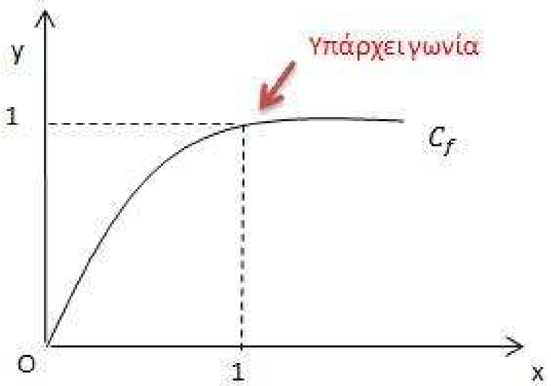


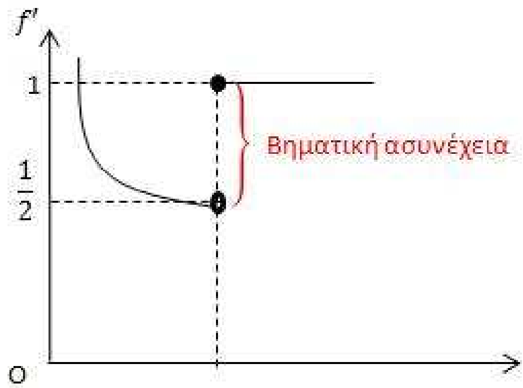
▹ Έχουμε $f(x)=\max\{x,\sqrt{x}\}, x\in[0,+\infty)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, 0\le x<1\\ x,\ x\ge 1\end{cases}\quad \text{με}\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, 0\le x<1\\ 1,\ x\ge 1\end{cases}$$

Τα γραφήματα των $C_f, C_{f'}$ είναι τα ακόλουθα:





Η βηματική ασυνέχεια της παραγώγου είναι:

$$f'(x_0^+)-f'(x_0^-)=f'(1^+)-f'(1^-)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)-\lim_{x\to 1^-}f'(x)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

οπότε η f' εμφανίζει στο $x_0=1$ βηματική ασυνέχεια.

Άσκηση 5η: Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων στο θετικό διάστημα:

$$xe^{-x},\ x^2e^{x},\ \ x\ln x,\ \sqrt{x}\ln x,\ \ln x+x^{-1}$$

Λύση: ▹ $f(x)=xe^{-x}, x\in[0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$,αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x})\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

$$f'(x)=(xe^{-x})'=e^{-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{-x}=e^{-x}(1-x),x\geq 0$$

- $f'(0)=1$ (δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης της Cf στο $x_0=0$ είναι 1 ή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}((1-x)e^{-x})\overset{(-\infty)\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x}{e^x}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$

- Στάσιμο σημείο:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(1-x)e^{-x}=0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}1-x=0\Leftrightarrow x=1$$

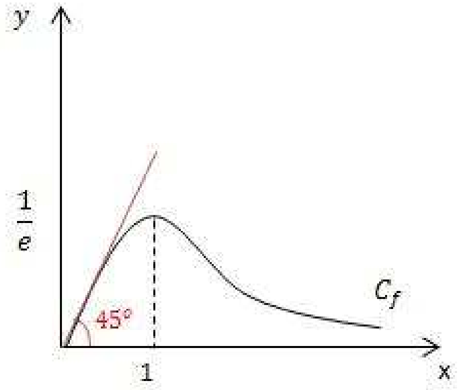
- $f'(x)>0\Leftrightarrow(1-x)e^{-x}>0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}1-x>0\Leftrightarrow 0\leq x<1$

- $f'(x)<0\Leftrightarrow(1-x)e^{-x}<0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}1-x<0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)		+	0	−
f(x)		↗		↘

O.M

f(1)=e⁻¹=1/e



▹ Έχουμε $f(x)=x^2e^x,\, x\in[0,+\infty)$

• $f(0)=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^x)\overset{(+\infty)(+\infty)}{=}+\infty$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

$f'(x)=(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x,\, x\geq 0$

• $f'(0)=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}((2x+x^2)e^x\overset{(+\infty)(+\infty)}{=}+\infty$

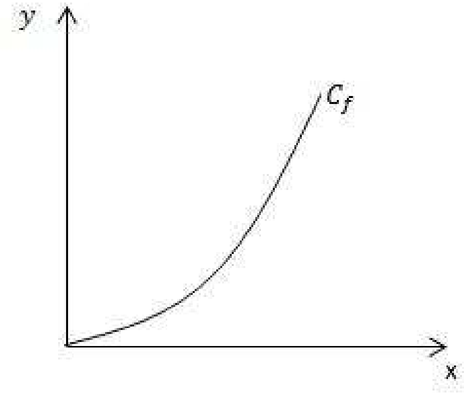
• Στάσιμο σημείο:

$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+x^2)e^x=0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0$ (δεκτή) ή $x=-2$ (απορ.)

• $f'(x)>0\Leftrightarrow(2x+x^2)e^x=0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}x(x+2)>0\Leftrightarrow x<-2$ ή $x>0\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x>0$

• $f'(x)<0\Leftrightarrow(2x+x^2)e^x<0\underset{\forall x\in R}{\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}}x(x+2)<0\Leftrightarrow x\in(-2,0)$ αδύνατη, αφού $x\geq 0$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.



▷ Έχουμε $f(x) = x\ln x, x \in (0,+\infty)$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right) \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln x) \overset{(+\infty)(+\infty)}{=} +\infty$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1, x > 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + 1) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x + 1) = +\infty$

• Στάσιμο σημείο:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

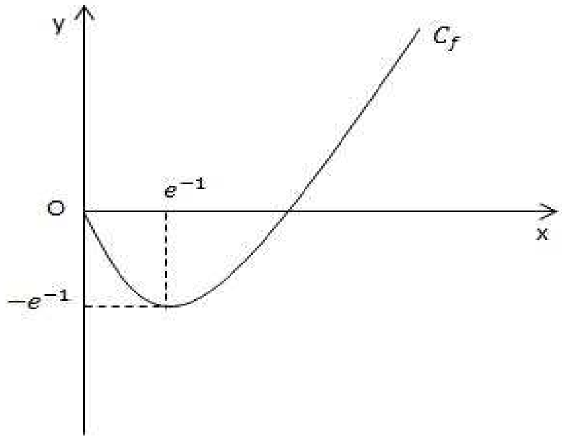
• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$

• $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{e}$

x	−∞	0		1/e		+∞
f'(x)			−	0	+	
f(x)			↘		↗	

O E

$f(e^{-1}) = -1/e$



▹ Έχουμε $f(x)=\sqrt{x}\ln x, x\in\left(0,+\infty\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right)\overset{\frac{(-\infty)}{(+\infty)}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x^{\frac{3}{2}})=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\ln x\right)\overset{(+\infty)(+\infty)}{=}+\infty$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$με

$$f'(x)=(\sqrt{x}\ln x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}, x>0$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(\ln x+2\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\overset{(-\infty)(+\infty)}{=}-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)\overset{\frac{(+\infty)}{(+\infty)}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{2}}=0$

- Στάσιμο σημείο:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x+2=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}$$

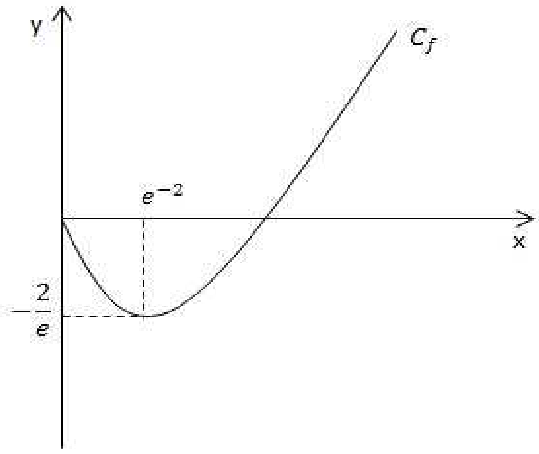
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x+2>0\Leftrightarrow\ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}$

- $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<e^{-2}$

x	... 0		e^{-2}	...
$f'(x)$	▨	$-$	0	$+$
$f(x)$	▨	↘		↗

Ο Ε

$f(e^{-2})=-2/e$



▷ Έχουμε $f(x)=\ln x+x^{-1}=\ln x+\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+\dfrac{1}{x})\overset{(-\infty)+(+\infty)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}((x\ln x+1)\cdot\dfrac{1}{x})\overset{(*)}{=}1\cdot(+\infty)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x+1)=0+1=1$ (*)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+\dfrac{1}{x})\overset{(+\infty)+0}{=}+\infty$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2},\ x>0$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)\overset{(-1)(+\infty)}{=}-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)=0$

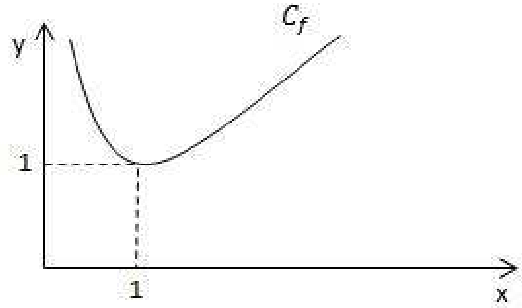
• Στάσιμο σημείο:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}>0 \Leftrightarrow x>1$

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

x	$-\infty$ 0		1	$+\infty$
f'(x)		−	0	+
f(x)		↘		↗



Άσκηση 6[η]: Να βρεθούν οι γραμμικές προσεγγίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0=0.

Λύση:

- Έχουμε $f(x)=(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}$, $x\neq 1$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$-{1} με

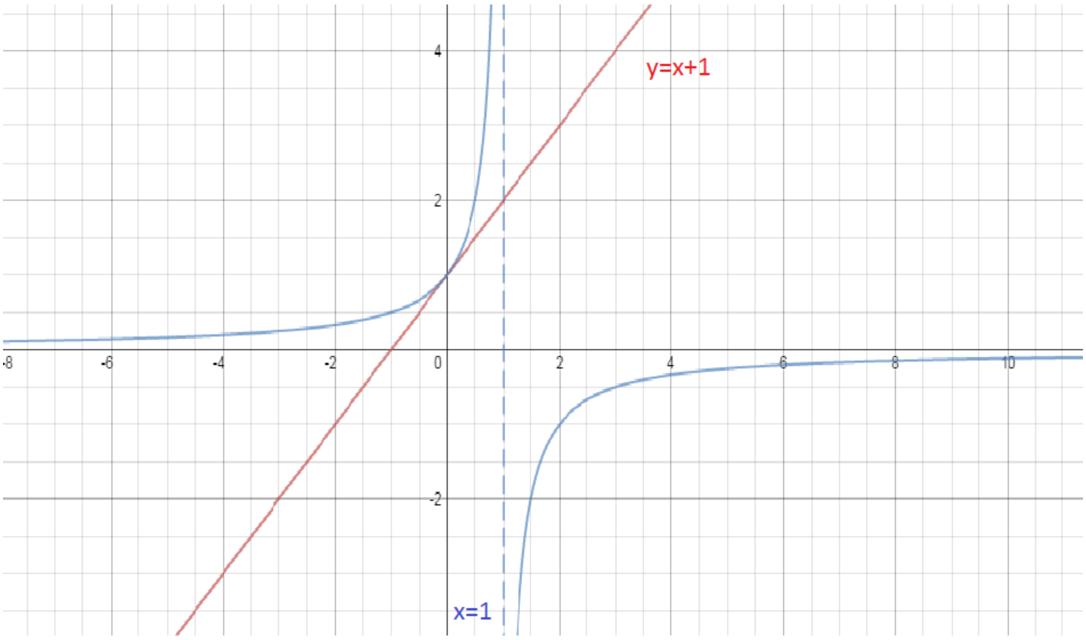
  $$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=-\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ x\neq 1$$

  Είναι f(0)=1 και $f'(0)=1$

  Άρα η γραμμική προσέγγιση της f στο x_0=0, είναι:

  $f(x)\approx f(0)+f'(0)\,(x-0)=1+x$

> Η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0 \in D_f$, είναι:
>
> $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_o)\,(x-x_0)$
>
> Σημείωση: Γραμμική προσέγγιση καλείται η γραμμική συνάρτηση της εφαπτόμενης ευθείας.



- Έχουμε $f(x)=(1+x)^{\frac{2}{3}}$, $x\in[-1,+\infty)$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

  $f'(x)=\left((1+x)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(1+x)'=\frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}}$, $x>-1$

  Είναι $f(0)=(1+0)^{\frac{2}{3}}=1$ και $f'(0)=\frac{2}{3}(1+0)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

  Άρα η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0=0$, είναι:

  $f(x)\approx f(0)+f'(0)(x-0)=1+\frac{2}{3}x$

- Έχουμε $f(x)=\ln(1+x^2)$, $x\in\mathbb{R}$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\left(\ln(1+x^2)\right)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

  Είναι $f(0)=\ln\left(1+0^2\right)=0$ και $f'(0)=\frac{2\cdot 0}{0^2+1}=0$

  Άρα η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0=0$, είναι:

  $f(x)\approx f(0)+f'(0)(x-0)=0$, δηλαδή ο άξονας x'x.

- Έχουμε $f(x)=x^3+x+2$, $x\in\mathbb{R}$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\left(x^3+x+2\right)'=3x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$

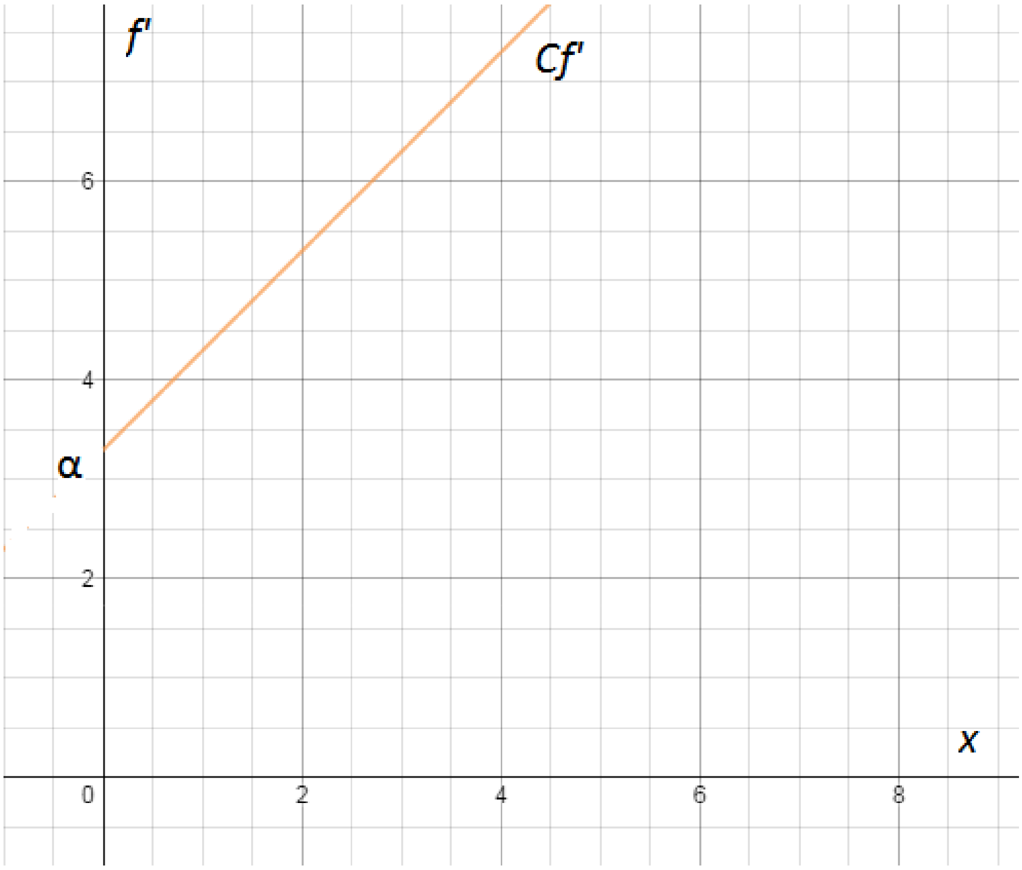
  Είναι $f(0)=0^3+0+2=2$ και $f'(0)=3\cdot 0^2+1=1$

  Άρα η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0=0$, είναι:

  $f(x)\approx f(0)+f'(0)(x-0)=2+x$

Άσκηση 7η: Να γίνουν στο θετικό διάστημα τα γραφήματα των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$, με $f(0)=0$, των οποίων οι παράγωγοι $f'(x)$ έχουν τα παρακάτω γραφήματα.

Λύση:

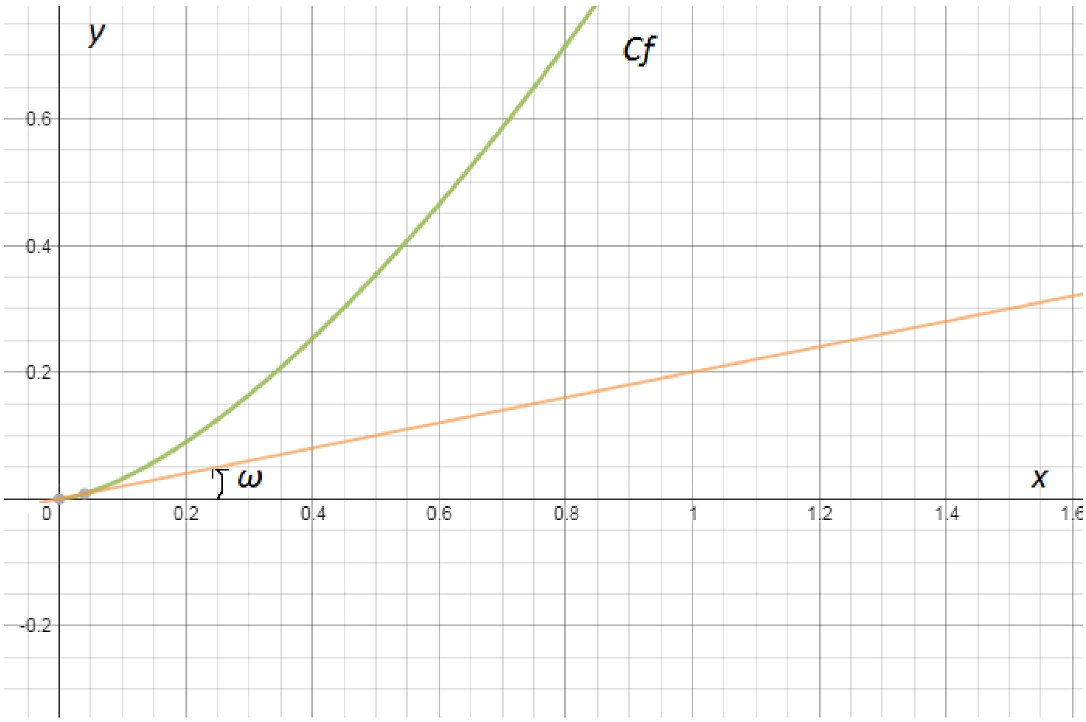


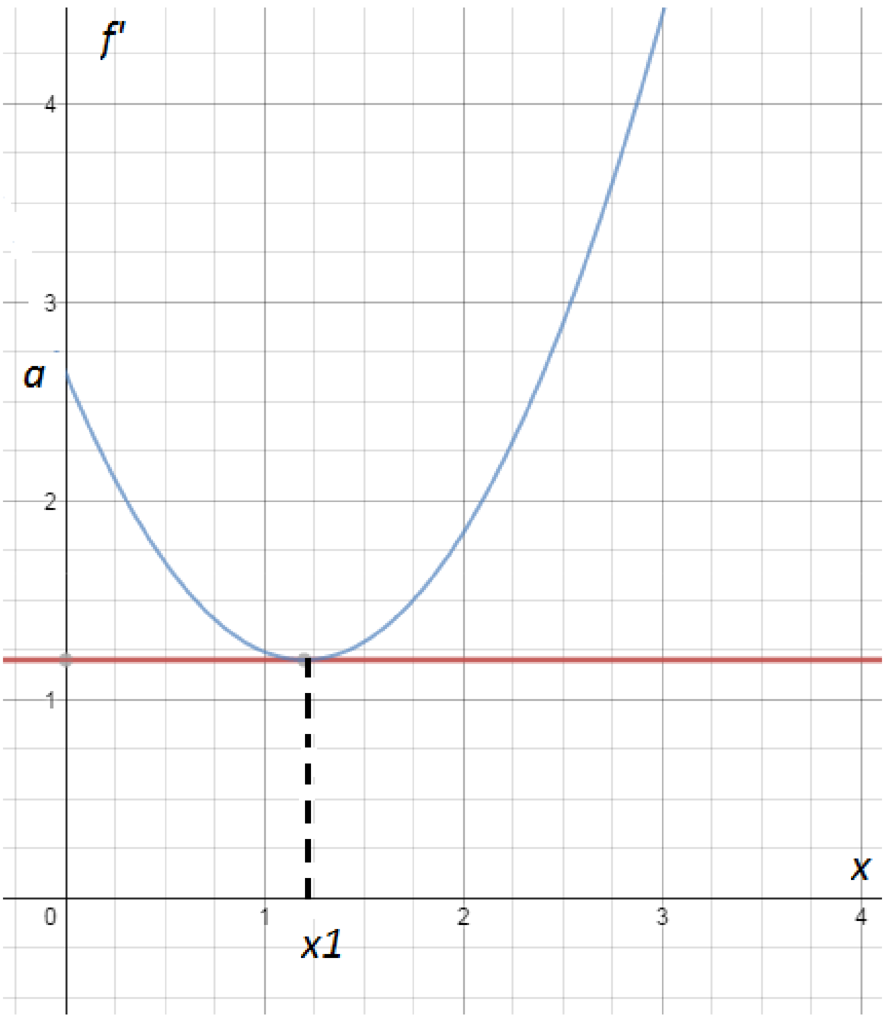
Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in [0,+\infty)$ (αφού η $C_f{}'$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ τότε ισχύει $f''(x)>0, \forall\ x \in [0,+\infty)$, δηλαδή η f είναι γνήσια κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Αφού το γράφημα της f ' είναι ευθεία, τότε το γράφημα της f θα είναι παραβολή με τις παραπάνω ιδιότητες.

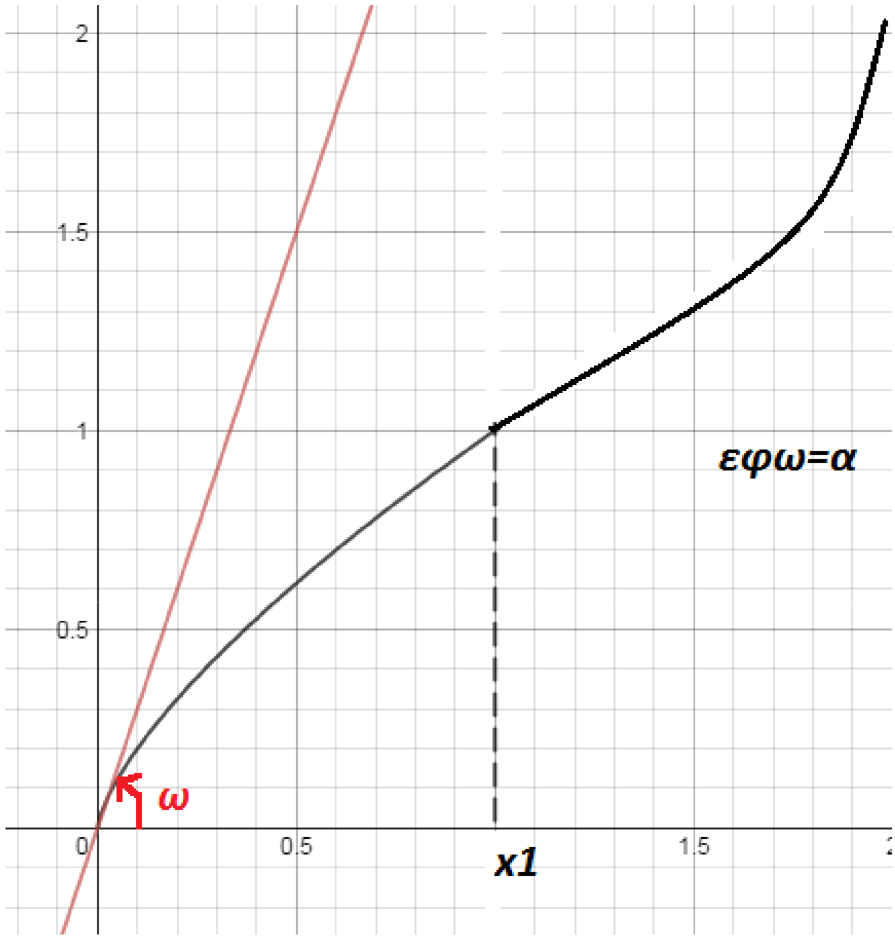
Επειδή $f(0)=0$ τότε η C_f αρχίζει από το σημείο Ο(0,0), έχοντας κάποια κλίση, ώστε η εφαπτομένη της στο σημείο Ο(0,0) να σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω, με εφω=α. Επομένως, έχουμε:

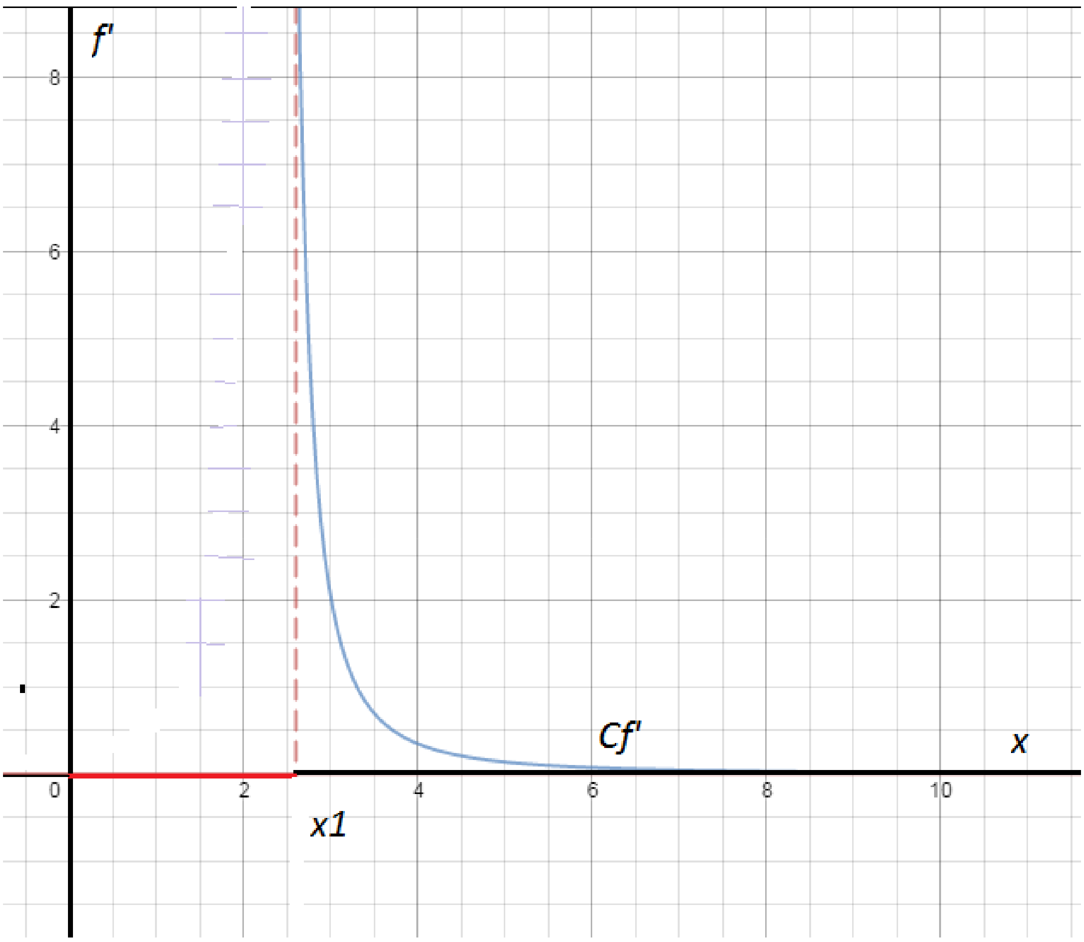

y
Cf
ω
x
0.6
0.4
0.2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6


f'
a
x
x1
4
3
2
1
0
1
2
3
4

Παρατηρούμε ότι $f'(x)$>0, $\forall\ x\in[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

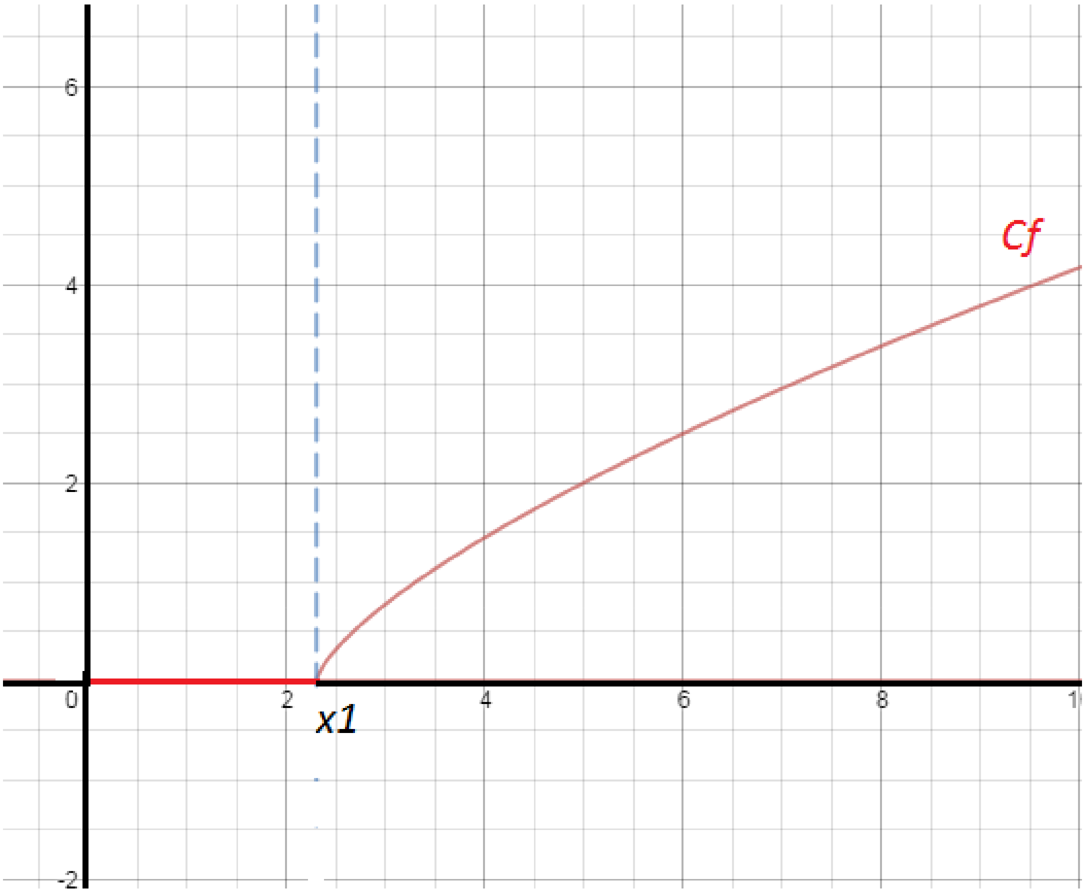
- $0\le x\le x_1$: η f' είναι γνησίως, τότε ισχύει $f''(x)$<0 , $\forall\ x\in[0,x_1)$, δηλαδή η f είναι γνήσια κοίλη. (η f αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό)
- $x=x_1$: η f' παρουσιάζει στη θέση $x=x_1$, ελάχιστο οπότε πρέπει $f''(x_1)$=0, δηλαδή η C_f παρουσιάζει στο σημείο $(x_1, f(x_1))$, σημείο καμπής.
- $x_1<x<+\infty$: η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει $f''(x)$>0, $\forall\ x\in(x_1,+\infty)$, οπότε η f είναι γνήσια κυρτή στο $(x_1,+\infty)$, δηλαδή η f αυξάνεται με αύξοντα ρυθμό. Επομένως, έχουμε :





Παρατηρούμε ότι:

- $0 \le x \le x_1$: η f είναι σταθερή, αφού $f'(x)$=0, $\forall\ x \in [0, x_1]$
  Τότε ισχύει $f(x)$=c, $\forall\ x \in [0, x_1]$, $c \in R$. Όμως, $f(0)$=0 οπότε πρέπει c=0, άρα $f(x)$=0, $\forall\ x \in [0, x_1]$
- $x = x_1$: η f' δεν είναι συνεχής στο $x = x_1$, αφού $f'(x_1^-)$=0 και $f'(x_1^+) = +\infty$. (έχουμε άπειρη ασυνέχεια της f' στο σημείο $x = x_1$.
- $x_1 < x < +\infty$: Είναι $f'(x)$<0, $\forall\ x \in (x_1, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_1, +\infty)$. Επίσης η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_1, +\infty)$, τότε ισχύει $f''(x)$<0, $\forall\ x \in (x_1, +\infty)$ δηλαδή η f είναι γνήσια κοίλη.



Άσκηση 8η: Να βρεθεί με αντίστροφη και με πλεγμένη παραγώγιση η παράγωγος της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $x = y^3 + y + 2$.

Λύση:

- Έχουμε $x(y) = y^3 + y + 2$ τότε $x'(y) = \frac{dx}{dy} = 3y^2 + 1$

  οπότε από τον τύπο της αντίστροφης παραγώγισης, έχουμε :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x, οπότε έχουμε:

  $x=y^3(x)+y(x)+2 \Rightarrow 1=3y^2 \cdot y' + y' \Leftrightarrow y'(3y^2+1) = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3y^2+1}$

Άσκηση 9η: Για κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις, να βρεθούν πλεγμένα οι παράγωγοι του y ως προς x και του x ως προς , και να γίνει επαλήθευση. Να βρεθούν και τα γραφήματα

Λύση:

- $2x + 3y = 8$ (γραμμική εξίσωση)
  - Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x:

$2x+3y(x)=8$ τότε $2+3y'(x)=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{2}{3}$

- **Επαλήθευση**: Λύνουμε ως προς y και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς x, οπότε έχουμε:

  $2x+3y=8 \Leftrightarrow 3y=-2x+8 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

  Άρα $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$

- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς y, θεωρώντας το x ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του y:

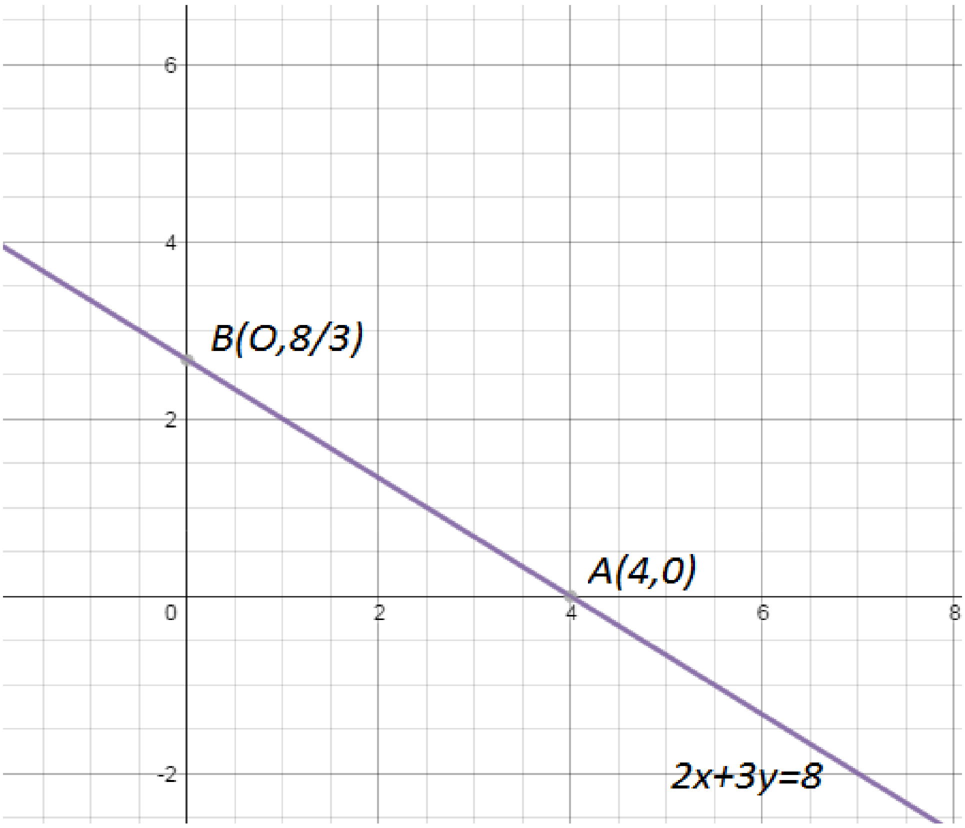
  $2x(y)+3y=8$ τότε $2x'+3=0 \Leftrightarrow x'=-\frac{3}{2}$

- **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς x και στην συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς y, οπότε έχουμε:

  $2x+3y=8 \Leftrightarrow 2x=-3y+8 \Leftrightarrow x(y)=-\frac{3}{2}y+4$ άρα $x'=\frac{dx}{dy}=-\frac{3}{2}$

- **Γράφημα**:

x	0	4
y	$\frac{8}{3}$	0



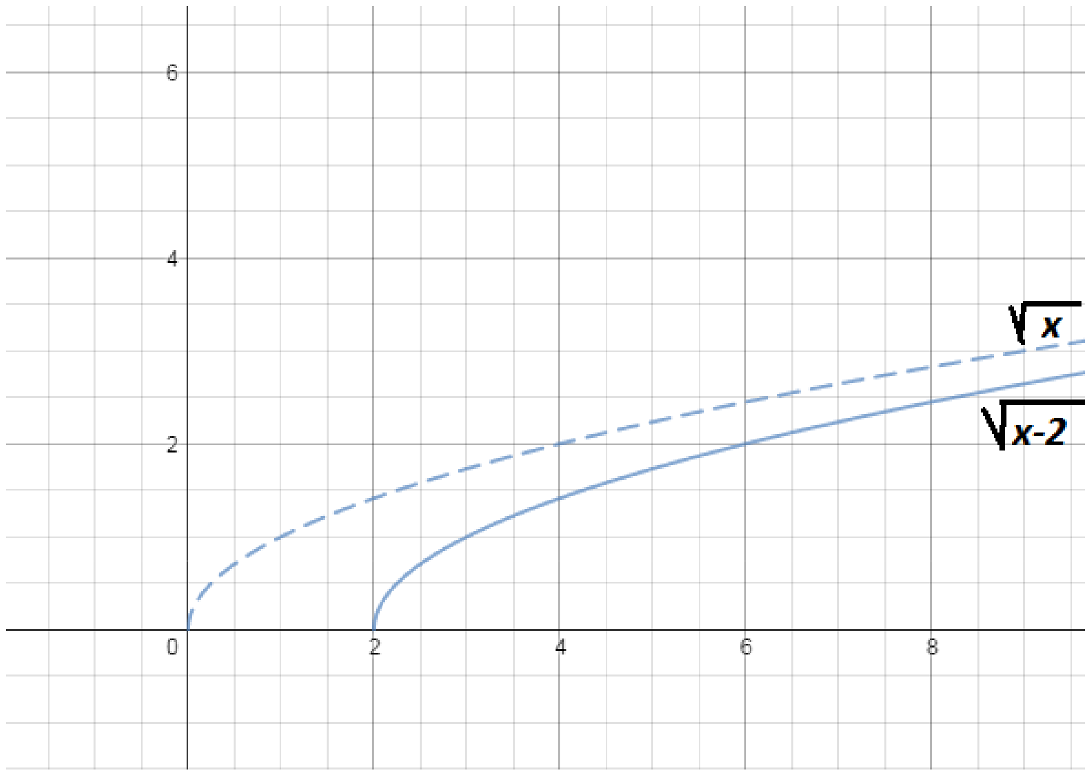
- Έχουμε : $y=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \; y^2-x=-2$
    - Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x:

      $y^2(x)-x=-2$ τότε $2yy'-1=0 \Leftrightarrow y'=\dfrac{1}{2y} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$
    - **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς y και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς x, οπότε έχουμε:

      $y=\sqrt{x-2}$ τότε $y'=\left(\sqrt{x-2}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(x-2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$
    - Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς y, θεωρώντας το x ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του y:

      $y^2-x(y)=-2$ τότε $2y-x'=0 \Leftrightarrow x'=\dfrac{dx}{dy}=2y$
    - **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς x και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς y, οπότε έχουμε:

      $y^2-x=-2 \Leftrightarrow \; x(y)=y^2+2$ τότε $x'(y)=\dfrac{dx}{dy}=2y$
    - **Γράφημα**:



- Έχουμε $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \; (1)$
    - Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x:

$\sqrt{x}+\sqrt{y(x)}=3$ τότε $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0 \Leftrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\overset{(1)}{=}-\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

- **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς y και στην συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς x, οπότε έχουμε :

  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \sqrt{y}=3-\sqrt{x} \overset{0\le x\le 9}{\Leftrightarrow} y=\left(3-\sqrt{x}\right)^2$

  άρα $y'=\frac{dy}{dx}=2\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)'=2\left(3-\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς y, θεωρώντας το x ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του y:

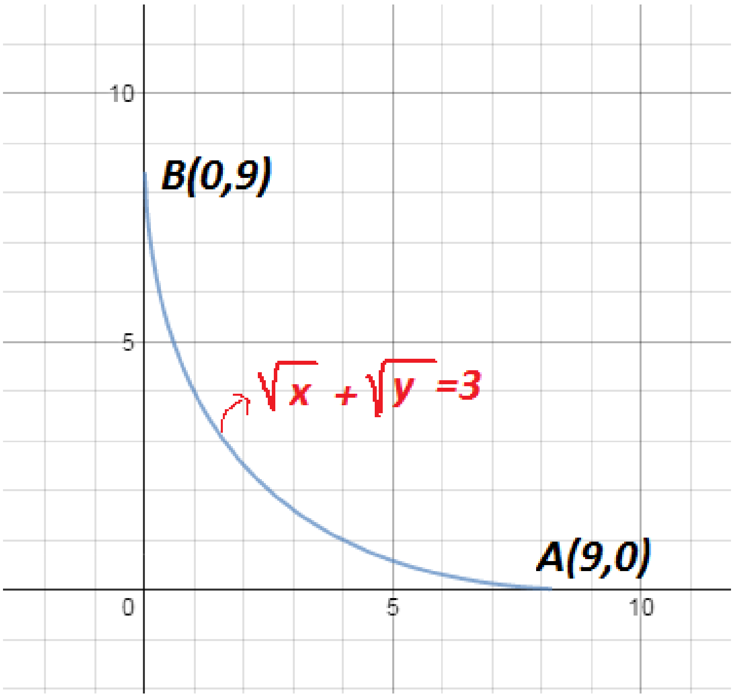
  $\sqrt{x(y)}+\sqrt{y}=3$ τότε $\frac{1}{2\sqrt{x}}x'+\frac{1}{2\sqrt{y}}=0 \Leftrightarrow x'=\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\overset{(1)}{=}-\frac{3-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

- **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς x και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς y, οπότε έχουμε:

  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3-\sqrt{y} \overset{0\le y\le 9}{\Leftrightarrow} x(y)=\left(3-\sqrt{y}\right)^2$ τότε

  $x'=\frac{dx}{dy}=2\left(3-\sqrt{y}\right)\left(3-\sqrt{y}\right)'=2\left(3-\sqrt{y}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=-\frac{3-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

- **Γράφημα**:



x	0	9
y	9	0

- Έχουμε $\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}=3 \Leftrightarrow x^3+y^3=9$ (1)
   - Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του x:

     $x^3+y^3(x)=9$ τότε $3x^2+3y^2\cdot y'=0 \Leftrightarrow 3y^2\cdot y'=-3x^2 \Leftrightarrow y'=-\dfrac{x^2}{y^2}$
   - **Επαλήθευση**: Λύνουμε την εξίσωση ως προς y και στην συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς x, οπότε έχουμε :

     $x^3+y^3=9 \Leftrightarrow y^3=9-x^3 \Leftrightarrow y(x)=\left(9-x^3\right)^{\frac{1}{3}}$ άρα

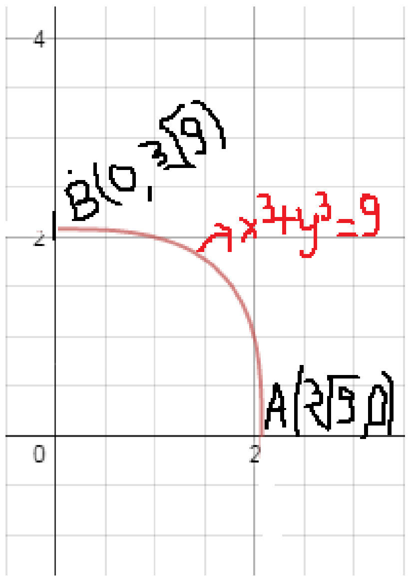
     $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(9-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(9-x^3\right)'=\frac{1}{3}\left(9-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-3x^2\right)=-\frac{x^2}{\left(9-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}\overset{(1)}{=}-\frac{x^2}{\left(y^3\right)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{x^2}{y^2}$$
- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς y, θεωρώντας το x ως την αντίστοιχη πλεγμένη συνάρτηση του y:

  $x^3(y)+y^3=9$ τότε $3x^2\cdot x'+3y^2=0 \Leftrightarrow 3x^2x'=-3y^2 \Leftrightarrow x'=\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y^2}{x^2}$
- Επαλήθευση: Λύνουμε την εξίσωση ως προς x και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς y, οπότε έχουμε:

  $x^3+y^3=9 \Leftrightarrow x^3=9-y^3 \Leftrightarrow x(y)=\left(9-y^3\right)^{\frac{1}{3}}$, άρα

  $$x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}\left(9-y^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(9-y^3\right)'=\frac{1}{3}\left(9-y^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-3y^2\right)=-\frac{y^2}{\left(9-y^3\right)^{\frac{2}{3}}}\overset{(1)}{=}-\frac{y^2}{\left(x^3\right)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{y^2}{x^2}$$
- **Γράφημα**:

x	0	$\sqrt[3]{9}$
y	$\sqrt[3]{9}$	0



Άσκηση 10η: Να επαληθευτεί ο κανόνας σχετιζόμενων ρυθμών για τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις:

$$\{x=1-2t, y=4t\}, \left\{x=1-\sqrt{t}, y=\frac{t}{4}\right\}, \{x=3-2t, y=t^2-2t+1\}$$

Λύση:

- $\{x=1-2t, y=4t\}$
  - **Κανόνας Σχετιζόμενων Ρυθμών**:

    $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{4}{-2}=-2$, αφού $\dfrac{dy}{dt}=4, \dfrac{dx}{dt}=-2$
  - **Επαλήθευση**:

    Έχουμε $\begin{cases} x=1-2t \\ y=4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=1-x \\ y=4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1-x}{2} \\ y=4t \end{cases} \Rightarrow y=4\cdot\dfrac{1-x}{2}=2-2x$

    οπότε $\dfrac{dy}{dx}=-2$

- $\left\{x=1-\sqrt{t}, y=\dfrac{t}{4}\right\}$
  - **Κανόνας Σχετιζόμενων Ρυθμών**:

    $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}=-\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{x-1}{2}$, αφού $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}, \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
  - **Επαλήθευση**:

    Έχουμε $\begin{cases} x=1-\sqrt{t} \\ y=\dfrac{t}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t}=1-x \\ y=\dfrac{t}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=(1-x)^2 \\ y=\dfrac{t}{4} \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{(1-x)^2}{4}=\dfrac{(x-1)^2}{4}, x\le 1$

    Άρα $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{1}{4}(x-1)^2\right)'=\dfrac{1}{4}2\cdot(x-1)(x-1)'=\dfrac{x-1}{2}$

- $\{x=3-2t, y=t^2-2t+1\}$
  - **Κανόνας Σχετιζόμενων Ρυθμών**:

    $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2t-2}{-2}=1-t=1-\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{x-1}{2}$

- **Επαλήθευση**:

Έχουμε $\begin{cases} x=3-2t \\ y=t^2-2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3-x \\ y=(t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{3-x}{2} \\ y=(t-1)^2 \end{cases} \Rightarrow y=\left(\dfrac{3-x}{2}-1\right)^2=\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{(x-1)^2}{4}$

Άρα $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{1}{4}(x-1)^2\right)'=\dfrac{1}{4}\cdot 2(x-1)(x-1)'=\dfrac{x-1}{2}$