Συναρτήσεις Κατανομής Πολλών Τυχαίων Μεταβλητών

Έννοιες:

- από κοινού κατανομή πιθανότητας
- οριακή (αλλιώς περιθωριακή) κατανομή πιθανότητας
- υπο συνθήκη (δεσμευμένη) κατανομή πιθανότητας

Όταν έχουμε παραπάνω από μία τυχαίες μεταβλητές μας ενδιαφέρει η από κοινού κατανομή πιθανοτήτων τους (π.χ. $P(X = x, Y = y)$ για $x, y \in \mathbb{R}$), προκειμένου να περιγράψουμε ένα τυχαίο πείραμα. Από μόνες τους οι (οριακές) κατανομές κάθεμιάς τυχαίας μεταβλητής ξεχωριστά γενικά δεν είναι αρκετές. Αυτό γιατί μπορεί να υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών. Δηλαδή οι τιμές που παίρνει η μία μπορεί να επηρεάζει τις τιμές που παίρνει κάποια άλλη. Στα οικονομικά συνήθως μας ενδιαφέρουν φαινόμενα που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία τυχαίες μεταβλητές.

Το μέτρο πιθανότητας στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μία τυχαίες μεταβλητές μπορεί να αναπαρασταθεί από την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την από κοινού συνάρτηση (μάζας ή πυκνότητας) πιθανότητας οι οποίες θα είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Συγκεκριμένα, η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής για 2 τυχαίες μεταβλητές X, Y θα ορίζεται ως $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

Αναλόγως μπορούμε να ορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για n τυχαίες μεταβλητές ως:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$

Αν έχουμε 2 διακριτές τυχαίες μεταβλητές X, Y τότε μπορούμε να ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας ως:

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

η οποία θα ικανοποιεί:

- $f(x, y) \ge 0$
- $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

Αναλόγως για n διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Αν έχουμε 2 συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y τότε μπορούμε να ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (αν η F_{XY} είναι παραγωγίσιμη) $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

η οποία θα ικανοποιεί:

- $f(x, y) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Οπότε μπορώ να υπολογίσω π.χ.

$$P(X \le a, Y \le b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f_{XY}(x, y) dx dy$$

Παράδειγμα (συνεχείς) Παράδειγμα από κοινού αθροιστικής συνάρτησης και από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16}xy(x+y) & \text{για } 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & \text{για } 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι μπορώ να υπολογίσω π.χ. την ακόλουθη πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \geq 1) &= \int_1^\infty \int_{-\infty}^1 \frac{1}{8}(x+y)dxdy \\ &= \frac{1}{8}\int_1^2 \int_0^1 (x+y)dxdy \\ &= \frac{1}{8}\int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{8}\int_1^2 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Παράδειγμα (διακριτές) Ρίψη νομίσματος 3 φορές: $\Omega = \{$ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ$\}$.

Ένα παράδειγμα 2 εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών είναι οι X, Y όπου X είναι ο αριθμός που φέρνουμε Κ στις 2 πρώτες ρίψεις, και Y είναι ο αριθμός που φέρνουμε Κ στις 2 τελευταίες ρίψεις. Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/8 & \text{για } (x,y) = (0,0) & \omega \in \{\text{ΓΓΓ}\} \\ 1/8 & \text{για } (x,y) = (0,1) & \omega \in \{\text{ΓΓΚ}\} \\ 1/8 & \text{για } (x,y) = (1,0) & \omega \in \{\text{ΚΓΓ}\} \\ 2/8 & \text{για } (x,y) = (1,1) & \omega \in \{\text{ΚΓΚ,ΓΚΓ}\} \\ 1/8 & \text{για } (x,y) = (1,2) & \omega \in \{\text{ΓΚΚ}\} \\ 1/8 & \text{για } (x,y) = (2,1) & \omega \in \{\text{ΚΚΓ}\} \\ 1/8 & \text{για } (x,y) = (2,2) & \omega \in \{\text{ΚΚΚ}\} \\ 0 & \text{αλλιώς} & \end{cases}$$

Δεδομένης της παραπάνω από κοινού συνάρτησης πιθανότητας μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες που αφορούν και τις 2 τυχαίες μεταβλητές ταυτόχρονα. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \geq 1) &= \sum_{x \leq 1, y \geq 1} f_{XY}(x,y) \\ &= f(0,1) + f(1,1) + f(1,2) = 1/2 \end{aligned}$$

Το γεγονός ότι ορίζουμε 2 ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να σκεφτούμε την κατανομή κάθεμιάς τυχαίας μεταβλητής ξεχωριστά. π.χ. στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε

$$f_X(x) = f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2/8 & \text{για } x = 0 & \omega \in \{\text{ΓΓΓ,ΓΓΚ}\} \\ 4/8 & \text{για } x = 1 & \omega = \{\text{ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ}\} \\ 2/8 & \text{για } x = 2 & \omega = \{\text{ΚΚΓ,ΚΚΚ}\} \\ 0 & \text{αλλιώς} & \end{cases}$$

Αναλόγως μπορούμε να υπολογίσουμε και την συνάρτηση πιθανότητας της Y.

Στο πλαίσιο αυτό, αναφερόμαστε σε αυτές τις συναρτήσεις πιθανότητας που αφορούν μία μόνο τυχαία μεταβλητή ως *οριακές συναρτήσεις πιθανότητας*, καθώς προκύπτουν από τις από κοινού ως εξής:

Διακριτή περίπτωση: $f_X(x) = P(X = x, Y \in \mathbb{R}) = \sum_y f_{XY}(x, y)$ και $f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$.

Συνεχής περίπτωση: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$ και $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx$

- Από την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μπορούμε επίσης να εξάγουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της μίας τυχαίας μεταβλητής δεδομένης (κάποιας τιμής) της άλλης:

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \\
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}
\end{aligned}
$$

  δεδομένου ότι $f_Y(y) > 0$ και $f_X(x) > 0$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα (διακριτές)

Από κοινού και οριακές συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας

$f(x, y)$	X			$f_Y(y)$
Y	0	1	2	
0	0.05	0.1	0.03	0.18
1	0.21	0.11	0.19	0.51
2	0.08	0.15	0.08	0.31
$f_X(x)$	0.34	0.36	0.30	1.00

Δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένης της X

$f_{Y\|X}(x, y)$	X		
Y	0	1	2
0	(.05/.34 =)0.147	(.1/.36 =)0.278	(.03/.3 =)0.10
1	0.618	0.305	0.633
2	0.235	0.417	0.267
$Total$	1	1	1

Παράδειγμα (συνεχείς)

Θεωρείστε την

$$
f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{για } 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

Οι οριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$
f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1 - x)
$$

για $0 < x < 1$ και 0 αλλιώς. Δηλαδή

$$
f_X(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{για } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

Αναλόγως,

$$
f_Y(y) = 2(1 - y)
$$

για $0 < y < 1$ και 0 αλλιώς. Οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$\begin{aligned} \text{Για } 0<y<1\text{: } f_{X|Y}(x|y) &= \begin{cases} \frac{1}{1-y} & \text{για } 0<x<1, x+y<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ \text{Για } 0<x<1\text{: } f_{Y|X}(y|x) &= \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{για } 0<y<1, x+y<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- Δύο τυχαίες μεταβλητές λέμε ότι είναι *ανεξάρτητες* όταν ισχύει για την από κοινού αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας ότι:

  $$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{για κάθε } x,y \in \mathbb{R}$$

  το οποίο θα συνεπάγεται και για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας ότι:

  $$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{για κάθε } x,y \in \mathbb{R}$$

- Αν δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες τότε η δεσμευμένη κατανομή της καθεμιάς ταυτίζεται με την οριακή κατανομή της:

  $$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} && \text{εξ ορισμού} \\ &= \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} && \text{Αν } X,Y \text{ είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (διακριτές)
Δίνεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$f(x,y)$	X		$f_Y(y)$
Y	0	1	
0	0.06	0.14	0.20
1	0.24	0.56	0.80
$f_X(x)$	0.30	0.70	1.00

Μπορεί εύκολα να εξακριβωθεί ότι οι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες δείχνοντας ότι $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για κάθε κελί του παραπάνω πίνακα, π.χ. $0.06 = 0.30 \cdot 0.20$.

Παράδειγμα (συνεχείς) Η ακόλουθη:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0<x<1 \text{ και } 0<y<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

μπορεί να γραφτεί ως $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ όπου οι οριακές συναρτήσεις πιθανότητας είναι

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 1dy = 1 & \text{για } 0<x<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 1dx = 1 & \text{για } 0<y<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$