Τυχαίες Μεταβλητές

Έννοιες:

- Τυχαία Μεταβλητή
- Κατανομή Πιθανότητας Τυχαίας Μεταβλητής
- Από κοινού και οριακή κατανομή πιθανότητας
- Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών

Ο χώρος πιθανότητας που περιγράφει το πείραμα $(\Omega, \Sigma_\Omega P)$ για κάθε πείραμα έχει διαφορετική μορφή και το Ω μπορεί να περιλαμβάνει διαφόρων ειδών στοιχεία. Επίσης το μέτρο πιθανότητας είναι όπως είπαμε συνολοσυνάρτηση οπότε συνήθως είναι δύσκολο να περιγραφεί. Γι' αυτό προτιμάμε να μεταφέρουμε αυτόν τον χώρο στους πραγματικούς αριθμούς αντιστοιχίζοντας τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος σε πραγματικούς αριθμούς.

Τυχαία μεταβλητή είναι οποιαδήποτε συνάρτηση από το Ω στο $\mathbb{R}$, π.χ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Καθώς ο χώρος Ω έχει κάποια δομή, αυτή η δομή μεταφέρεται και στο χώρο των πραγματικών. Οπότε μπορούμε να ασχολούμαστε με τον καινούριο χώρο $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R}, P_\mathbb{R})$ χωρίς να χάνουμε κάτι σε πληροφορία όταν περιγράφουμε το πείραμα. Φυσικά μπορούμε να ορίσουμε όσες τυχαίες μεταβλητές θέλουμε πάνω στον αρχικό χώρο όποτε για n μεταβλητές ο καινούριος χώρος θα είναι $(\mathbb{R}^n, \Sigma_{\mathbb{R}^n}, P_{\mathbb{R}^n})$. Στο χώρο των πραγματικών είναι πολύ πιο εύκολο να δουλέψουμε (πραγματική ανάλυση) καθώς εκεί μπορούμε να δουλεύουμε με πραγματικές συναρτήσεις για να αναπαριστούμε το μέτρο πιθανότητας αντί για συνολοσυναρτήσεις.

Συμβολισμός: Τις τυχαίες μεταβλητές γενικά τις συμβολίζουμε με μεγάλα γράμματα π.χ. X, Y, Z και τις τιμές που μπορούν να πάρουν με μικρά π.χ. x, y, z. π.χ. θα λέμε $P(X = x)$ και θα εννοούμε την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει την τιμή x.

Παράδειγμα: Ρίψη κέρματος μία φορά.

$$\Omega = \{\text{Κ}, \Gamma\}$$

$P(\{\text{Κ}\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \Gamma \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{Κ} \end{cases}$$

Οπότε θα έχουμε $P(X = 0) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$ και $P(X = 1) = P(\{\text{Κ}\}) = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 2: Ρίψη κέρματος τρεις φορές.

$$\Omega = \{\text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}\}.$$

Μπορώ να ορίσω την τυχαία μεταβλητή X που μου λέει πόσες φορές θα έρθουν γράμματα:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΚ} \\ 2 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΚ} \\ 2 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΓ} \\ 2 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΚ} \\ 3 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΓ} \end{cases}$$

οπότε θα έχω $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$.
Επίσης για το ίδιο πείραμα μπορώ να ορίσω τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3 όπου $X_1 = 1$ αν στην πρώτη ρίψη φέρω γράμματα και 0 αλλιώς. Άρα:

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΚ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΓ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΚ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΓ} \end{cases}, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΚ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΓ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΚ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΓ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΓ} \end{cases}, \quad X_3(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΚΓ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΚΓΓ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΚΓ} \\ 0 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΚ} \\ 1 & \text{αν } \omega = \text{ΓΓΓ} \end{cases}.$$

Παρατηρείστε ότι για την τυχαία μεταβλητή που ορίσαμε πριν ισχύει ότι $X = X_1 + X_2 + X_3$, καθώς οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3 περιγράφουν πλήρως το τυχαίο πείραμα. Επίσης, αν γνωρίζω την *από κοινού κατανομή πιθανότητας* των X_1, X_2, X_3

$$P(X_1 = x, X_2 = y, X_3 = z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

μπορώ να προσδιορίσω την πιθανότητα π.χ. να φέρω γράμματα και στις 3 ρίψεις η οποία θα είναι $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \frac{1}{8}$, το οποίο είναι απλά η πιθανότητα της τομής 3 ενδεχομένων, δηλ. μπορούμε να γράψουμε

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = P(\{\omega : X_1(\omega) = 1\} \cap \{\omega : X_2(\omega) = 1\} \cap \{\omega : X_3(\omega) = 1\})$$

Και καθώς η κάθε ρίψη είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, οι τυχαίες μεταβλητές θα λέμε ότι είναι *ανεξάρτητες*, οπότε η παραπάνω πιθανότητα θα είναι ίση με

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

αφού για ανεξάρτητα ενδεχόμενα η πιθανότητα της τομής τους όπως έχουμε δει ισούται με το γινόμενο των (οριακών) πιθανοτήτων τους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρείστε επίσης ότι $P(X_1 = x) =$

$P(X_2 = x) = P(X_3 = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } x = 0,1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ οπότε οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια (οριακή) κατανομή πιθανότητας. Οπότε αν ορίσω την *συνάρτηση πιθανότητας* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } x = 0,1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ θα έχω ότι

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = [f(1)]^3 = \frac{1}{8}.$$

Οπότε η περιγραφή ενός πειράματος μπορεί να γίνει με τη χρήση τυχαίων μεταβλητών και των (από κοινού) κατανομών πιθανότητας τους. Όπως δουλεύαμε στον αρχικό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, P)$ μπορούμε με ανάλογο τρόπο, αλλά πολύ πιο εύκολα να δουλέψουμε και στο χώρο των πραγματικών αριθμών.