ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, *email: sarridan@aueb.gr*

Problem Set 7

Άσκηση 7.1

Μία εταιρία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες και γνωρίζει ότι η μέση διάρκεια ζωής τους είναι 1200 ώρες με τυπική απόκλιση 300 ώρες. Το τμήμα ερευνών της εταιρίας προτείνει μια νέα διαδικασία παραγωγής, με τον ισχυρισμό ότι αυτή θα αυξήσει τη διάρκεια ζωής των λαμπτήρων. Για να ελέγξει τον ισχυρισμό αυτό, ο διευθυντής της εταιρίας ζητά να παραχθούν 100 λαμπτήρες με τη νέα διαδικασία και να μετρηθεί η διάρκεια ζωής τους. Έστω ότι η μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων αυτών ήταν 1265 ώρες. Θεωρώντας ότι το παραπάνω δείγμα είναι μεγάλο,
(α) Να ελέγξετε την υπόθεση $H_0 : \mu = 1200$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : \mu \neq 1200$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $a = 0.05$.
(β) Επίσης, να κατασκευάσετε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
Δίνεται ότι $P(Z < -1.96) = P(Z > 1.96) = 0.05/2 = 0.05$ για $Z \sim N(0, 1)$

Λύση

(α) Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε μη-κανονικό πληθυσμός και ουσιαστικά, άγνωστη κατανομή δειγματικού μέσου. Εφόσον το δείγμα είναι μεγάλο, θα ισχύει προσεγγιστικά ότι: $Z := \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, όπου $\hat{\sigma}$ οποιοσδήποτε συνεπής εκτιμητής του σ, δηλ. $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$. Άρα θα έχουμε:

Απορρίπτω την μηδενική υπόθεση H_0, όταν:

$$|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| > z_{\alpha/2} \Longleftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \text{ ή } \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2} \tag{1}$$

Δηλαδή, για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, ισχύει ότι:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1265-1200}{300/\sqrt{100}} = 2.16 > 1.96 \tag{2}$$

Άρα απορρίπτω την μηδενική υπόθεση.

(β) Μπορώ να βγάλω ένα ασφαλές συμπέρασμα για το μ κατασκευάζοντας ένα $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για ένα επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0.05$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για μη κανονικό πληθυσμό αλλά μεγάλο δείγμα αν λύσω ως προς λύνω ως προς μ (αντί για $\bar{X}$).

$$
\begin{aligned}
-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} &\Longleftrightarrow \\
-z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} \leq \bar{X}-\mu \leq z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} &\Longleftrightarrow \\
-\bar{X}-z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} \leq -\mu \leq -\bar{X}+z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} &\Longleftrightarrow \\
\bar{X}-z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X}+z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n} &\Longleftrightarrow \\
1265-1.96\frac{300}{10} \leq \mu \leq 1265+1.96\frac{300}{10} &\Longleftrightarrow \\
1206.2 \leq \mu \leq 1323.8 &
\end{aligned}
$$

$\mu \in [\bar{X}-z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\hat{\sigma}/\sqrt{n}]$
Δηλαδή $\mu \in [1206.2, 1323.8]$.
Καθώς $P(Z < -1.96) = P(Z > 1.96) = 0.05/2 = 0.025$ για $Z \sim N(0,1)$

Άσκηση 7.2

Μια καταγγελία αναφέρει ότι τα κουτιά ενός απορρυπαντικού δεν έχουν, κατά μέσο όρο, το αναγραφόμενο βάρος, το οποίο είναι 5 κιλά. Έστω ότι ένα τυχαίο δείγμα 16 τέτοιων κιβωτίων έδωσε $\bar{x} = 4.85265$ και $s = 0.43952$ κιλά. Θεωρώντας ότι ο πληθυσμός είναι κανονικός,
(α) Να διατυπώσετε τις υποθέσεις H_0 και H_1 για να ελέγξετε αν το μέσο βάρος στον πληθυσμό είναι 5 κιλά ή λιγότερο.
(β) Να κάνετε τον παραπάνω έλεγχο σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $a = 0.05$ και $a = 0.01$.
Δίνεται ότι $P(Z < -1.65) = P(Z > 1.65) = 0.05$ και $P(Z < -2.33) = P(Z > 2.33) = 0.01$ για $Z \sim N(0,1)$

Λύση

(α) Οι έλεγχοι διατυπώνονται ως εξής:
$H_0 : \mu = 5$
$H_1 : \mu < 5$

(β) Στη συγκεκριμένη άσκηση δίνεται ότι ο πληθυσμός είναι κανονικός άρα, απορρίπτω την μηδενική όταν:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \tag{3}$$

Άρα, για $\alpha = 0.05$,

$$\frac{4.85265-5}{0.43952/\sqrt{16}} = -1.341 > -1.645 \tag{4}$$

Άρα δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση για επίπεδο σηματικότητας 0.05.

για $\alpha = 0.01$ θα έχω:

$$\frac{4.85265-5}{0.43952/\sqrt{16}} = -1.341 > -2.33 \tag{5}$$

Επίσης, δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση για επίπεδο σηματικότητας 0.01.

Άσκηση 7.3

Έστω ότι σε ένα τυχαίο δείγμα 50 καλλιεργειών ενός αγροτικού προϊόντος, οι οποίες επιλέχθηκαν για να δοκιμασθεί μία νέα μέθοδος παραγωγής, οι 30 καλλιέργειες παρουσίασαν βελτίωση στην ποσότητα και την ποιότητα παραγωγής. Θεωρώντας ότι το παραπάνω δείγμα είναι μεγάλο,
(α) Να ελέγξετε για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $a = 0.1$ την υπόθεση $H_0 : p = 0.5$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : p \neq 0.5$
(β) Να κατασκευάσετε το 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το p.
Δίνεται ότι $P(Z < -1.65) = P(Z > 1.65) = 0.1/2 = 0.05$ για $Z \sim N(0, 1)$

Λύση

(α) Εδώ έχουμε ότι οι 30 από τις 50 καλλιέργειες του δείγματος παρουσίασαν βελτίωση στην ποσότητα και ποιότητα παραγωγής. Άρα βάσει του παραπάνω, η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την Bernoulli , με $E(X) = p$ και $Var(X) = p(1-p)$. Όμως εδώ το p είναι άγνωστο. Χρησιμοποιώντας το δειγματικό μέσο μεσω της Μεθόδου των ροπών έχω ότι:

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{30}{50} = 0.6 \tag{6}$$

Άρα για τη διακύμανση θα έχω την εκτίμηση $Var(\hat{p}) = \hat{p}(1 - \hat{p})/n$.

Έλεγχος υποθέσεων:
$H_0 : p = 0.5$
$H_1 : p \neq 0.5$

Εφόσον το δείγμα μας είναι μεγάλο, μπορούμε προσεγγιστικά να καταλήξουμε:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}} \sim N(0, 1) \tag{7}$$

Απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση αν,

$$|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}}| > z_{\alpha/2} \tag{8}$$

Άρα θα έχω:

$$|\frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{0.6(1 - 0.6)/50}}| = \frac{0.1}{0.0692} = 1.445 < 1.65 \tag{9}$$

Συνεπώς δεν απορρίπτω τη μηδενική υπόθεση για το συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας.

(β) Το 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το p θα είναι:

$$[\hat{p} - z_{0.1/2}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + z_{0.1/2}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}] \tag{10}$$

$$[0.6 - 1.65\sqrt{0.6(1 - 0.6/50}, 0.6 + 1.65\sqrt{0.6(1 - 0.6)/50}] \tag{11}$$

$$[0.48, 0.71] \tag{12}$$

Καθώς $P(Z < -1.65) = P(Z > 1.65) = 0.1/2 = 0.05$ για $Z \sim N(0, 1)$