ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Σχολή Οικονομικών Επιστημών - Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Στατιστική Ι - Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Α. Λουκά *email: loukaalex@aueb.gr*
Βοηθός: Δ. Σαρρή, ***email: sarridan@aueb.gr***

Άσκηση 3.1

Έστω ότι η διακριτή (ασυνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας: $f(x) = cx$ για $x = 1, 2, 3, 4, 5$ και $f(x) = 0$ για τις άλλες τιμές της X. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;

Λύση

Ουσιαστικά έχω την συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x = 1,2,3,4,5 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{1}$$

Για την $f(x) = P(X = x)$, η οποία για κάθε τιμή της X μας δίνει την αντίστοιχη πιθανότητα, πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες ότι $\sum_x f(x) = 1$ και $f(x) \geq 0$.
Συνεπώς, παίρνουμε ότι

$$\sum_x f(x) = 1 \iff \sum_x cx = 1 \iff c\sum_x x = 1 \iff c(1+2+3+4+5) = 1 \iff 15c = 1 \iff c = \frac{1}{15} \tag{2}$$

Άσκηση 3.2

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009] Αν $f(x) = \frac{2(\beta-x)}{\alpha\beta}$, όπου $\beta > x > 0$ είναι συνάρτηση πυκνότητας, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

Λύση

Εφόσον η $f(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει το εξής: $\int_0^\beta f(x)dx = 1$.

$$\int_0^\beta \frac{2(\beta - x)}{\alpha\beta}dx = 1 \iff \frac{2}{\alpha\beta}\int_0^\beta (\beta - x)dx = 1 \iff$$
$$\frac{2}{\alpha\beta}[\beta x - \frac{x^2}{2}]_0^\beta = 1 \iff \frac{2}{\alpha\beta}(\beta^2 - \frac{\beta^2}{2}) = 1 \iff$$
$$\frac{\beta^2}{2} = \frac{\alpha\beta}{2} \iff \beta = \alpha$$

Άσκηση 3.3

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Μια τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας την $f(x) = \frac{C}{x}$ με $1 \leq x \leq 2$. Να προσδιορίσετε τη σταθερά C.

Λύση

Εφόσον η $f(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει το εξής: $\int_1^2 f(x)dx = 1$.

$$\int_1^2 \frac{C}{x}dx = 1 \Longleftrightarrow C\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \Longleftrightarrow C[\ln 2 - \ln 1] = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{\ln 2} \tag{3}$$

Άρα η συνάρτηση είναι της μορφής: $f(x) = \frac{1}{x \ln 2}$, με $1 \leq x \leq 2$

Άσκηση 3.4

Έστω ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας: $f(x) = cx$ για $0 < x < 2$ και $f(x) = 0$ για οποιεσδήποτε άλλες τιμές.
(α) Να προσδιορίσετε τη τιμή της σταθεράς c.
(β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(0,5 < X < 1,5), P(X > 1)$ και $P(X = 1)$.
(γ) Να δοθεί η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της X.
(δ) Να υπολογίσετε το μέσο και τη διακύμανση της X.

Λύση

(α) Εφόσον η $f(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει το εξής: $\int_0^2 f(x)dx = 1$.

$$\int_0^2 cxdx = 1 \Longleftrightarrow c[\frac{x^2}{2}]_0^2 = 1 \Longleftrightarrow$$
$$c(\frac{2^2}{2}) = 1 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

(β) Ουσιαστικά έχω την συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{4}$$

$$P(0.5 < X < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1.5} xdx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_{0.5}^{1.5} = \frac{1}{2}(\frac{\frac{9}{4}}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2}) = \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1.5} xdx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}) = \frac{3}{4} \tag{6}$$

$$P(X = 1) = 0 \tag{7}$$

Επειδή η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή.

(γ)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ F(x) = \int_0^x f(v)dv = \int_0^x \frac{v}{2}dv = \frac{1}{2}[\frac{v^2}{2}]_0^x = \frac{x^2}{4}, & 2 \leq x \leq 0 \\ 1, & \gamma\iota\alpha\ x \geq 2 \end{cases} \tag{8}$$

(δ)

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{1}{2}\frac{2^3}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^2 x^2\frac{x}{2}dx - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx(\frac{4}{3})^2$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{x^4}{4}]_0^2 - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\frac{2^4}{4} - (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Άσκηση 3.5

[Δ. Χατζηνικολάου «Στατιστική για Οικονομολόγους» Ιωάννινα 2002]. Έστω ότι το κέρδος (X) που αποκομίζει ένας εργολάβος οικοδομών από την κατασκευή μίας οικοδομής είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{18}, & -1 < x < 5 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{9}$$

όπου οι μονάδες μέτρησης είναι σε εκατομμύρια ευρώ και οι αρνητικοί αριθμοί υποδηλώνουν ζημιές.
(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Πόσο είναι το αναμενόμενο κέρδος από μία συγκεκριμένη οικοδομή;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο εργολάβος να αποκομίσει ζημία από 0 μέχρι και 1 εκατομμύριο ευρώ από μία συγκεκριμένη οικοδομή;

Λύση

(α) Οι προυποθέσεις για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

- $f(x) \geq 0$
- $$\frac{1}{18}\int_{-1}^5 (x+1)dx = \frac{1}{18}[\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^5 = \frac{1}{18}(\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{18}18 = 1. \tag{10}$$

(β)

$$E(X) = \frac{1}{18}\int_{-1}^5 x(x+1)dx = \frac{1}{18}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_{-1}^5 = \frac{1}{18}(\frac{5^3}{3} + \frac{5^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{1}{2}) \approx 3 \tag{11}$$

(γ)

$$P(-1 < X < 0) = \frac{1}{18}\int_{-1}^0 (x+1)dx = \frac{1}{18}[\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^0 = \frac{1}{18}(-\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{36} \tag{12}$$

Άσκηση 3.6

Ένας εργολάβος γνωρίζει ότι η διεκπεραίωση ενός Δημόσιου Έργου θα του στοιχίσει 10 εκατ. ευρώ. Στη δημοπρασία για την ανάθεση του έργου αυτού θα επιλεγεί αυτός που θα κάνει τη μικρότερη προσφορά (μειοδοτικός διαγωνισμός). Ο εργολάβος πιστεύει ότι οι άλλοι εργολάβοι της αγοράς (οι ανταγωνιστές του) θα ζητήσουν τουλάχιστον X εκατ. ευρώ για να διεκπεραιώσουν το έργο και ότι η X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα από 8 μέχρι 20 εκατ. ευρώ:

$$f(x) = \begin{cases} 1/12, & 8 < x < 20 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ x\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{13}$$

(α) Αν ο εργολάβος μας προσφερθεί να εκτελέσει το έργο έναντι 12 εκατ. ευρώ τι πιθανότητα έχει να κερδίσει τον διαγωνισμό; (για να κερδίσει πρέπει αυτός να έχει κάνει τη μικρότερη προσφορά έναντι των ανταγωνιστών του).
(β) Έστω ότι ο εργολάβος κάνει την προσφορά των 12 εκατ. ευρώ για το έργο. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος από αυτή του την απόφαση;

Λύση

(α)

$$P(X > 12) = \int_{12}^{20} f(x)dx = \int_{12}^{20} \frac{1}{12}dx = [\frac{1}{12}x]_{12}^{20} = 20/12 - 1 = 8/12 = 2/3 \tag{14}$$

(β)
Δεδομένου ότι έχει πάρει τον διαγωνισμό, θέλω να υπολογίσω το εξής:

$$E(X) = \int_{8}^{12} xf(x)dx = \int_{8}^{12} x\frac{1}{12}dx = [\frac{1}{12}\frac{x^2}{2}]_8^{12} = [\frac{x^2}{24}]_8^{12} = \frac{144}{24} - \frac{64}{24} = 10/3$$

Άσκηση 3.7

[Ε.Γ. Τσιώνας «Στατιστική με Εφαρμογές στα Οικονομικά» Αθήνα 2009]. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 , να βρείτε την τιμή c που ελαχιστοποιεί το $E[(X-c)^2]$.

Λύση

Έστω ότι ορίζουμε συνάρτηση:

$$f(c) = E[(X-c)^2] \tag{15}$$

Θα ελαχιστοποιήσω την συνάρτηση ως προς c και θα δω την τιμή που μου δίνει:

$$f'(c) = 0 \iff E[-2(X-c)] = 0 \iff -2E[(X-c)] = 0 \iff E[X] = E[c] \iff c = E[X] = \mu \tag{16}$$

Άσκηση 3.8

Σε έρευνα του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών σχετικά με το εργατικό δυναμικό της χώρας και τα ποσοστά ανεργίας, ανάλογα με το επίπεδο μόρφωσης του κάθε ατόμου, συλλέξαμε τα στοιχεία που συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα της από κοινού κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X, Y.

Όπου η τυχαία μεταβλητή Y αντιστοιχεί στο επίπεδο εκπαίδευσης ενός ατόμου και μπορεί να πάρει τις τιμές $Y = 0$ αν το άτομο είναι Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, $Y = 1$ αν το άτομο έχει λάβει Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και $Y = 2$, αντίστοιχα για Τριτοβάθμια. Η τυχαία μεταβλητή X

$Y\|X$	$X=0$	$X=1$	
	άνεργος	όχι άνεργος	Άθροισμα
1ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=0$	0.03	0.22	
2ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=1$	0.072	0.328	
3ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=2$	0.028	0.322	
Άθροισμα			

αναπαριστά για το άτομο αυτό ειναι άνεργο ($X=0$) ή όχι ($X=1$).

(α) Με βάση τον πίνακα που δίνεται, να βρεθούν οι οριακές συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
(β) Να βρεθεί η υπό συνθήκη πιθανότητα P('1ο βάθμια'|' Άνεργος')

Λύση

(α) Η περιθωριακή-οριακή συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X υπό μορφή πίνακα, δίνεται από την 1η και την τελευταία γραμμή του πίνακα, ενώ η περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας της Y δίνεται από την 1η και την τελευταία στήλη του πίνακα της από κοινού κατανομής των X και Y.

$Y\|X$	$X=0$	$X=1$	
	άνεργος	όχι άνεργος	$f_Y(y)$
1ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=0$	0.03	0.22	0.25
2ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=1$	0.072	0.328	0.4
3ο βάθμια Εκπαίδευση $Y=2$	0.028	0.0322	0.35
$f_X(x)$	0.13	0.87	1

Άρα βάσει του πίνακα θα έχω:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.13, & X=0 \\ 0.87, & X=1 \end{cases} \tag{17}$$

Αντίστοιχα για την οριακή συνάρτηση της Y έχω:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.25, & Y=0 \\ 0.4, & Y=1 \\ 0.35, & Y=2 \end{cases} \tag{18}$$

(β) Η υπό συνθήκη πιθανότητα του να είναι 1ο βάθμιας εκπαίδευσης δεδομένου ότι είναι άνεργος είναι ουσιαστικά η πιθανότητα:

$$P(Y=0|X=0) = \frac{P(Y=0, X=0)}{P(X=0)} = \frac{0.03}{0.13} = \frac{3}{13} \tag{19}$$

Άσκηση 3.9

Έστω ότι η από κοινού συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας δύο ασυνεχών τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{42}, & x = 0,1,2 \ = 0,1,2,3 \\ 0, & \gamma\iota\alpha \ \ x, y \ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{20}$$

(α) Να δοθεί ο πίνακας της από κοινού κατανομής των X και Y.
(β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X = 2, Y = 1), P(X \geq 1, Y \leq 2)$.
(γ) Να υπολογίσετε τις (περιθωριακές) συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και να τις απεικονίσετε στον πίνακα του ερωτήματος (α).
(δ) Να υπολογίσετε τις ποσότητες: $E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2), Var(X), Var(Y), E(XY), Cov(X,Y), \rho$.
(ε) Να ελέγξετε αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι στατιστικά ανεξάρτητες.
(στ) Να δοθεί η συνάρτηση $f(y|x = 2)$.
(ζ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα: $P(Y = 1|X = 2)$.
(η) Να υπολογιστούν οι ποσότητες: $E(Y|X = 2)$ και $Var(Y|X = 2)$.

Λύση

(α) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης που περιγράφεται με τις δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές. Ο πίνακας της απο κοινού κατανομής των X και Y είναι ο ακόλουθος:

Υ \X	0	1	2	$f_Y(y)$
0	0/42	2/42	4/42	6/42
1	1/42	3/42	$\boxed{5/42}$	9/42
2	2/42	4/42	6/42	12/42
3	3/42	5/42	7/42	15/42
$f_X(x)$	6/42	14/42	22/42	1

(β)

$P(X = 2, Y = 1) = 5/42$ δίνεται στον πίνακα του (α)

$P(X \geq 1, Y \leq 2) = \frac{2}{42} + \frac{4}{42} + \frac{3}{42} + \frac{5}{42} + \frac{4}{42} + \frac{6}{42} = \frac{4}{7}$

(γ) Η περιθωριακή-οριακή συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X υπό μορφή πίνακα, δίνεται από την 1η και την τελευταία γραμμή του πίνακα, ενώ η η περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας της Y δίνεται από την 1η και την τελευταία στήλη του πίνακα της από κοινού κατανομής των X και Y.

Έχουμε δηλαδή τα ακόλουθα:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_y \frac{2x+y}{42} = \frac{1}{42}(\sum_y 2x + \sum_y y) = \frac{1}{42}(2x \sum_y 1 + \sum_y y) =$$
$$\frac{1}{42}[2x(1+1+1+1) + (0+1+2+3)] =$$
$$\frac{1}{42}(8x+6) = \frac{4x+3}{21}$$

για $x = 0, 1, 2$.
Αντίστοιχα έχω για την περιθωριακή συνάρτηση της Y:

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_x \frac{2x+y}{42} = \frac{1}{42}(\sum_x 2x + \sum_x y) = \frac{1}{42}(2\sum_x x + y\sum_x 1) =$$
$$\frac{1}{42}[2(0+1+2)) + y(1+1+1)] =$$
$$\frac{1}{42}(6+3y) = \frac{2+y}{14}$$

για $y = 0, 1, 2, 3.$

(δ) $E(X) = \sum_x x f_X(x) = 0 + 1\frac{4\cdot1+3}{21} + 2\frac{4\cdot2+3}{42} = \frac{29}{21}$

$E(Y) = \sum_y y f_Y(y) = 0 + 1\frac{2+1}{21} + 2\frac{2+2}{21} + 3\frac{2+3}{21} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$

$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = 0 + 1^2\frac{4\cdot1+3}{21} + 2^2\frac{4\cdot2+3}{21} = \frac{51}{21} = \frac{17}{7}$

$E(Y^2) = \sum_y y^2 f_Y(y) = 0 + 1^2\frac{2+1}{14} + 2^2\frac{2+2}{14} + 3^2\frac{2+3}{14} = \frac{64}{14} = \frac{32}{7}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{7} - (\frac{29}{21})^2 = \frac{230}{441}$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{32}{7} - (\frac{13}{7})^2 = \frac{55}{49}$

$$\begin{aligned} E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y) &= 0\cdot 0\frac{2\cdot0+0}{42} + 0\cdot1\frac{2\cdot0+1}{42} + 0\cdot2\frac{2\cdot0+2}{42} + 0\cdot3\frac{2\cdot0+3}{42} \\ &+1\cdot 0\frac{2\cdot1+0}{42} + 1\cdot1\frac{2\cdot1+1}{42} + 1\cdot2\frac{2\cdot1+2}{42} + 1\cdot3\frac{2\cdot1+3}{42} \\ &+2\cdot 0\frac{2\cdot2+0}{42} + 2\cdot1\frac{2\cdot2+1}{42} + 2\cdot2\frac{2\cdot2+2}{42} + 2\cdot3\frac{2\cdot2+3}{42} \\ &= 0+0+0+0+0+\frac{3}{42}+\frac{8}{42}+\frac{15}{42}+0+\frac{10}{42}+\frac{24}{42}+\frac{42}{42} = \frac{102}{42} = \frac{17}{7} \end{aligned} \tag{21}$$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{17}{7} - \frac{29}{21}\frac{13}{7} = -0.13605 < 0$ αρνητική συσχέτιση.

$\rho = \frac{Cov(X,Y}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-0.13605}{\sqrt{\frac{230}{441}}\sqrt{\frac{55}{49}}} = -0.1778$

Παρατηρούμε ότι η συνδιακύμανση είναι αρνητική άρα έχουμε αρνητική συσχέτιση. Προσοχή όμως, εδώ μας ενδιαφέρει μόνο το πρόσημο και όχι το μέγεθος αφού στη συνδιακύμανση λαμβάνουμε υπόψιν και τις μονάδες μέτρησης. Για αυτόν το λόγο χρησιμοποιούμε το συντελεστή συσχέτισης που είναι απαλλαγμένο από αυτές.

(ε) Ανεξαρτησία θα έχω όταν το γινόμενο των περιθωριακών $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ θα ισούται με την από κοινού κατανομή $f(x,y)$. Άρα στη συγκεκριμένη άσκηση ισχύει
$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{4x+3}{21}\cdot\frac{2+y}{14} \neq \frac{2\cdot x+y}{42} = f(x,y)$

(στ)

$$f(y|x=2) = \frac{f(y,x=2)}{f_x(2)} = \frac{\frac{y+4}{42}}{\frac{22}{42}} = \frac{y+4}{22} \tag{22}$$

για $y = 0, 1, 2, 3$

(ζ) $P(Y=1|X=2) = f(y=1|x=2) = \frac{1+4}{22} = \frac{5}{22}$

(η) $E(Y|X=2) = \sum_y yf(y|x=2) = \sum_y y\frac{y+4}{22} = 1\frac{1+4}{22} + 2\frac{2+4}{22} + 3\frac{3+4}{22} = \frac{38}{22} = \frac{19}{11}$

$$Var(Y|X=2) = \sum_y y^2 f(y|x=2) - [E(Y|X=2)]^2 =$$

$$\sum_y y^2\frac{y+4}{22} - (\frac{19}{11})^2 = 1^2\frac{1+4}{22} + 2^2\frac{2+4}{22} + 3^2\frac{3+4}{22} - \frac{19^2}{11^2} = \frac{5}{22} + \frac{24}{22} + \frac{63}{22} - \frac{19^2}{11^2} = \frac{145}{121}$$

Άσκηση 3.10

Έστω ότι έχουμε την από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας δύο συνεχών τυχαίων μεταβλητών:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210}, & 2 < x < 6 \ \ 0 < y < 5 \\ 0, & \gamma\iota\alpha \ \ x, y \ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \tag{23}$$

(α) Να επιβεβαιώσετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι πράγματι μία από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > 3, Y < 2)$
(γ) Να υπολογίσετε τις (περιθωριακές) συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$
(δ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y στατιστικά ανεξάρτητες;
(ε) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E(X), E(Y), E(XY)$;
(στ) Να υπολογίσετε την υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x|y)$ και την υπο συνθήκη μέση τιμή $E(X|Y = y)$.

Λύση

(α) Για την $f(x,y)$, πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες ότι $\int_2^6 \int_0^5 f(x,y)dxdy = 1$ και $f(x,y) \geq 0$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι

$$f(x,y) \geq 0 \tag{24}$$

που ισχύει για όλα κάθε x, y.

$$\int_2^6 \int_0^5 f(x,y)dydx = \int_2^6 \int_0^5 \frac{2x+y}{210}dydx = \frac{1}{210}\int_2^6 [2xy + \frac{y^2}{2}]_0^5 dx =$$
$$\frac{1}{210}\int_2^6 (10x + \frac{25}{2})dx = \frac{1}{210}[\frac{10x^2}{2} + \frac{25x}{2}]_2^6 = \frac{1}{210}(180 + 75 - 20 - 25) = 1 \tag{25}$$

(β)

$$P(X > 3, Y < 2) = P(X \geq 3, Y \leq 2) = \int_3^6 \int_0^2 f(x,y)dydx = \int_3^6 \int_0^2 \frac{2x+y}{210}dydx =$$
$$\frac{1}{210}\int_3^6 [2xy + \frac{y^2}{2}]_0^2 dx = \frac{1}{210}\int_3^6 (4x+2)dx = \frac{1}{210}[\frac{4x^2}{2} + 2x]_3^6 = \frac{1}{210}(72 + 12 - 18 - 6) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7} \tag{26}$$

(γ)

$$f_X(x) = \int_0^5 f(x,y)dy = \int_0^5 f(x,y)dy = \frac{1}{210}\int_0^5 (2x+y)dy = \frac{1}{210}[2xy + \frac{y^2}{2}]_0^5 =$$
$$\frac{1}{210}(10x + \frac{25}{2}) = \frac{4x+5}{84}$$

$$f_Y(y) = \int_2^6 f(x,y)dx = \int_2^6 f(x,y)dx = \frac{1}{210}\int_2^6 (2x+y)dx = \frac{1}{210}[x^2 + yx]_2^6 =$$
$$\frac{1}{210}(36 + 6y - 4 - 2y) = \frac{4y+32}{210} = \frac{2y+16}{105}$$

(δ) Για αν είναι ανεξάρτητες θα πρέπει το γινόμενο των περιθωριακών συναρτήσεων να ισούται με την από κοινού των X, Y.

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{4x+5}{84} \cdot \frac{2y+16}{105} = \frac{8xy + 64x + 10y + 80}{8820} \neq f(x,y) \tag{27}$$

(ε)

$$E(X) = \int_2^6 x f_X(x)dx = \int_2^6 x\frac{4x+5}{84}dx = \frac{1}{84}\int_2^6 (4x^2+5x)dx = \frac{1}{84}[\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}]_2^6 = \frac{1}{84}(\frac{864}{3}+90-\frac{32}{3}-10) = \frac{1}{84}(\frac{832}{3}+80) = \frac{1}{84}\frac{1072}{3} = \frac{1072}{252}$$

$$E(Y) = \int_0^5 y f_Y(y)dy = \int_0^5 y\frac{2y+16}{105}dy = \frac{1}{105}\int_0^5 (2y^2+16y)dy = \frac{1}{105}[\frac{2y^3}{3}+8y^2]_0^5 = \frac{1}{105}(\frac{250}{3}+200) = \frac{1}{105}(\frac{250}{3}) = \frac{850}{315} = \frac{170}{63}$$

$$E(XY) = \int_2^6\int_0^5 xyf(x,y)dydx = \int_2^6\int_0^5 xy\frac{2x+y}{210}dydx = \frac{1}{210}\int_2^6\int_0^5 (2x^2y+xy^2)dydx = \frac{1}{210}\int_2^6 [x^2y^2+x\frac{y^3}{3}]_0^5dx = \frac{1}{210}\int_2^6 (25x^2+\frac{125x}{3})dx = \frac{1}{210}[\frac{25x^3}{3}+\frac{125x^2}{2}]_2^6 = \frac{1}{210}(\frac{25\cdot 216}{3}+\frac{125}{3}\frac{36}{2}-\frac{25\cdot 8}{3}-\frac{125\cdot 4}{3\cdot 2}) = \frac{1}{210}(\frac{25\cdot 208}{3}+\frac{125\cdot 32}{3\cdot 2}) = \frac{1}{210}\frac{5200+2000}{3} = \frac{240}{21}$$

(στ)

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{2x+y}{210}}{\frac{2y+16}{105}} = \frac{2x+y}{2(2y+16)}$$

$$E(X|Y=y) = \int_2^6 xf(x|y)dx = \int_2^6 x\frac{2x+y}{2(2y+16)}dx = \frac{1}{2(2y+16)}\int_2^6 (2x^2+xy)dx = \frac{1}{2(2y+16)}[\frac{2x^3}{3}+\frac{yx^2}{2}]_2^6 = \frac{1}{2(2y+16)}(\frac{2\cdot 216}{3}+\frac{36}{2}y-\frac{2\cdot 8}{3}-\frac{4}{2}y) = \frac{1}{4(y+8)}(\frac{2}{3}208+16y) = \frac{1}{4(y+8)}(\frac{416}{3}+\frac{48y}{3}) = \frac{104+12y}{3(y+8)}$$