Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ IV:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

22-02-2018

1. Το Υπόδειγμα

Μελετούμε ξανά το Νεοκλασσικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης και εξετάζουμε το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή, το οποίο είναι:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left[\left(1-\delta\right)k_t + Af\left(k_t\right) - k_{t+1}\right]$$

υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

$0 \leq k_{t+1} \leq \left(1-\delta\right)k_t + Af\left(k_t\right)$, k_0 δεδομένο.

Στην περίπτωση του ντετερμινιστικού προβλήματος υποθέσαμε ότι η συνολική παραγωγικότητα της οικονομίας, A, είναι σταθερή και δεδομένη. Ωστόσο, σε αυτή τη διάλεξη, υποθέτουμε ότι σε κάθε περίοδο η συνολική παραγωγικότητα είναι μία εξωγενής τυχαία μεταβλητή, θ. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε οτι οι επιχειρήσεις και τα νοικοκυριά παρατηρούν την τιμή του θ_t στην αρχή της περιόδου t. Επομένως, δεδομένης της τιμής του θ_t και του κεφαλαίου (ανά αποτελεσματικό νοικοκυριό), k_t, η παραγωγή της περιόδου t:

$$y_t = \theta_t f\left(k_t\right)$$

είναι επίσης γνωστή, και τα άτομα επιλέγουν το απόθεμα κεφαλαίου για την αρχή της επόμενης περιόδου, k_{t+1}. Αυτή η παρατήρηση έχει σημαντικές επιπτώσεις, καθώς επιφέρει δύο σημαντικές διαφοροποιήσεις στην ανάλυση του στοχαστικού υποδείγματος σε σχέση με το νετερμινιστικό. Πρώτον, η αντικειμενική συνάρτηση του ανιπροσωπευτικού νοικοκυριού δεν είναι ίδια με εκείνη του νετερμινιστικού πρβλήματος, διότι πλέον η συνολική χρησιμότητα του νοικοκυριού καθ'όλη τη διάρκεια της ζωής του είναι μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από τις μελλοντικές τιμές της συνολικής παραγωγικότητας (δηλαδή από την ακολουθία $\theta_1, \theta_2, \ldots$). Δεύτερον, στην περίπτωση του ντετερμινιστικού υποδείγματος το άριστο σχέδιο είναι μια ακολουθία αριθμών. Ωστόσο, στο στοχαστικό πρόβλημα, το κεφάλαιο που επιλέγεται για την αρχή κάθε μελλοντικής περιόδου, k_{t+1}, εξαρτάται από τις τιμές που θα πάρει η τυχαία μεταβλητή θ από τώρα (δηλαδή από την περίοδο 0) εώς και την περίοδο t. Κατά συνέπεια, υποθέτουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι η αναμενόμενη τιμή της διά βίου συνολικής χρησιμότητας του νοικοκυριού, ως προς την υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανότητας των μελλοντικων τιμών της παραγωγικότητας δεδομένου του θ_0. Επιπλέον, το άριστο σχέδιο για τις μελλοντικές τιμές του κεφαλάιου, k_{t+1}, θα συναρτάται από τις τιμές (realizations) της τυχαίας μεταβλητής θ εώς και την περίοδο t. Δεδομένων όλων των παραπάνω, καταλήγουμε στο ότι το στοχαστικό πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή παίρνει την εξής μορφή:

$$\max_{\left\{k_{t+1}(\theta^t)\right\}_{t=0}^{\infty}} E\left(\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left\{(1-\delta)k_t(\theta^{t-1})+\theta_t f[k_t(\theta^{t-1})]-k_{t+1}(\theta^t)\right\}\middle|\theta_0\right)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$0 \le k_{t+1}(\theta^t) \le (1-\delta)k_t(\theta^t)+\theta_t f[k_t(\theta^t)]$$

$(k_0,\theta_0)\in R_+^2$ δεδομένα

Διευκρινίζουμε ότι $E(\bullet)$ είναι ο τελεστής της μαθηματικής προσδοκίας, και $E(\bullet|\theta_0)$ δηλώνει ότι παίρνουμε τον μέσο σε σχέση με την υπό συνθήκη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $\left\{\theta_t\right\}_{t=1}^{\infty}$, δεδομένου του θ_0. Επιπλέον, $\theta^t=\left\{\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{t-1},\theta_t\right\}$ είναι η ιστορία (history) η οποία δημιουργείται από τις προκύπτουσες τιμές (realizations) της τυχαίας μεταβλητής θ εώς την αρχή της περιόδου t, και χαρακτηρίζει το σύνολο της πληροφορίας που είναι διαθέσιμο στα άτομα όταν καλλούνται να αποφασίσουν για το k_{t+1}. Επισημαίνουμε ότι k_1 είναι ένας αριθμός, ενώ το k_{t+1} είναι συνάρτηση της πληροφορίας που θα είναι διαθέσιμη στην αρχή της περιόδου t, θ^t. Για αυτό το λόγο η ακολουθία $\left\{k_{t+1}(\theta^t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται σχέδιο υπό αίρεση (contingency plan), καθώς οι αποφάσεις σχετικά με τα μελλοντικά αποθέματα κεφαλαίου εξαρτώνται από πληροφορίες οι οποίες δεν έχουν ακόμα προσδιοριστεί, και συνεπώς δεν είναι ακόμα γνωστές.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της συνάρτησης πιθανότητας του θ^t, παραθέτουμε το Βασικό Δυναμικό Στοχαστικό Πόβλημα σε Διακριτό Χρόνο.

2. Το Βασικό Δυναμικό Στοχαστκό Πρόβλημα σε Διακριτό Χρόνο

Το πρόβλημα που μελετούμε είναι της μορφής:

$$\max_{\left\{x_{t+1}(\theta^t)\right\}_{t=0}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t F\left[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t\right] \middle| \theta_0\right\} \quad \textbf{(IV.1)}$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_{t+1}(\theta^t) \in \Gamma\left[x_t(\theta^{t-1}), \theta_t\right], \quad \forall t \geq 0 \quad \textbf{(IV.2)}$$

$(x_0, \theta_0) \in X \times \Theta$ δεδομένα **(IV.3)**

όπου:

x_t	ενδογενής μεταβλητή κατάστασης
X	το σύνολο των δυνατών τιμών της ενδογενούς μεταβλητής κατάστασης
θ_t	εξωγενής μεταβλητή κατάστασης
Θ	το σύνολο των δυνατών τιμών της εξωγενούς μεταβλητής κατάστασης
(x_t, θ_t)	χαρακτηρίζει την κατάσταση του συστήματος στην αρχή της περιόδου t
$\left\{x_{t+1}(\theta^t)\right\}_{t=0}^{\infty}$	μία ακολουθία (sequence) διαδοχικών ενδογενών μεταβλητών κατάστασης ή ένα σχέδιο (plan) ή ένα μονοπάτι (path) που ακολουθεί το σύστημα καθ’όλο το χρονικό ορίζοντα
$\beta \in (0,1)$	συντελεστής διαχρονικής προτίμησης ή διαχρονικής προεξόφλησης (discount factor)
$\Gamma : X \times \Theta \rightarrow X$	αντιστοιχία που περιγράφει περιορισμούς στην μετάβαση του συστήματος από την μία περίοδο στην

άλλη. Δηλαδή, $\forall(x,\theta)\in X\times\Theta, \Gamma(x,\theta)$ είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της ενδογενούς μεταβλητής κατάστασης της επόμενης περιόδου αν η κατάσταση του συστήματος την τρέχουσα περίοδο δίδεται από (x,θ)

$F: A\to R$ προσωρινή αντικειμενική συνάρτηση (temporary objective function)

$A=\{(x,y,\theta)\in X\times X\times\Theta : y\in\Gamma(x,\theta)\}$ Σύνολο των δυνατών συνδυασμών δύο διαδοχικών καταστάσεων του συστήματος

Οι σχέσεις (IV.1) - (IV.3) συνιστούν το Βασικό Δυναμικό Στοχαστικό Πρόβλημα. Προφανώς, το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή μπορεί να εκφραστεί σε όρους του βασικού στοχαστικού προβλήματος αν θέσουμε:

$$
\begin{aligned}
&x_t = k_t\\
&X = R_+\\
&\Theta = R_+\\
&\Gamma(x,\theta)=\{y\in R_+ : 0\le y\le (1-\delta)x+\theta f(x)\}\\
&F(x,y,\theta)=u[(1-\delta)x+\theta f(x)-y]
\end{aligned}
$$

3. Πιθανότητες

Γενικά, η μελέτη πιθανοτήτων στα πλαίσια του βασικού δυναμικού στοχαστικού προβλήματος προϋποθέτει αναφορές στη θεωρία μέτρου, οι οποίες ξεφεύγουν από τα πλαίσια της ανάλυσης μας. Μπορούμε, ωστόσο, να αναφερθούμε σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις οι οποίες είναι ενδεικτικές της φύσης των προβλημάτων, καθώς και του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζουμε αυτά τα προβλήματα γενικότερα.

(1) Ασυνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κατανέμονται σύμφωνα με την ίδια συνάρτηση πιθανότητας

Υποθέτουμε πως οι τυχαίες μεταβλητές, $\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots$, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κατανέμονται σύμφωνα με την ίδια συνάρτηση πιθανότητας. Επιπλέον, υποθέτουμε πως κάθε μία μπορεί να πάρει ένα περιορισμένο αριθμό τιμών στο σύνολο $\Theta = \left\{ \vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_N \right\}$. Έχουμε δηλαδη ότι:

$$\Pr(\theta_t = \vartheta_j) = \pi_j,\ 0 \le \pi_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

Επιπλέον, $\theta^t \in \Theta^t = \underset{t=1}{\overset{t}{X}} \Theta$ και για κάθε ιστορία, $\theta^t = \{\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\alpha_2}, ..., \vartheta_{\alpha_t}\}$, έχουμε ότι $\pi_{\theta^t} \equiv \Pr(\theta^t) = \Pr(\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\alpha_2}, ..., \vartheta_{\alpha_t}) = \prod_{i=1}^{t} \pi_{\alpha_i}$. Η αντικειμενική συνάρτηση του Βασικού Στοχαστικού Δυναμικού Προβλήματος είναι της παρακάτω μορφής:

$$E\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \big| \theta_0\} =$$
$$E\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t]\} =$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\theta^t \in \Theta^t} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \pi_{\theta^t} =$$
$$F(x_0, x_1, \theta_0) + \beta \sum_{\theta^1 \in \Theta^1} F[x_1, x_2(\theta^1), \theta_1] \pi_{\theta^1} + ... + \beta^t \sum_{\theta^t \in \Theta^t} F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \pi_{\theta^t}$$
$$+ \beta^{t+1} \sum_{\theta^{t+1} \in \Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\theta^t), x_{t+2}(\theta^{t+1}), \theta_{t+1}] \pi_{\theta^{t+1}} + ...$$

Όπως και στην περίπτωση του ντετερμινιστικού υποδείγματος, εάν το $x_{t+1}(\theta^t)$ αποτελεί μέρος της λύσης του δυναμικού στοχαστικού προβλήματος, τότε πρέπει επίσης να επιλύει:

$$\max_{x_{t+1}(\theta^t)} \{ \sum_{\theta^t \in \Theta^t} F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \pi_{\theta^t} + \beta \sum_{\theta^{t+1} \in \Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\theta^t), x_{t+2}(\theta^{t+1}), \theta_{t+1}] \pi_{\theta^{t+1}} \}$$

Ισχύει όμως ότι:

$$\sum_{\theta^{t+1} \in \Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\theta^t), x_{t+2}(\theta^{t+1}), \theta_{t+1}] \pi_{\theta^{t+1}} =$$
$$\sum_{\theta^t \in \Theta^t} \pi_{\theta^t} \sum_{\theta_{t+1} \in \Theta} F[x_{t+1}(\theta^t), x_{t+2}(\theta^t, \theta_{t+1}), \theta_{t+1}] \pi_{\theta_{t+1}}$$

Κατά συνέπεια, εάν το $x_{t+1}(\theta^t)$ είναι μέρος της λύσης, τότε επίσης πρέπει να επιλύει:

$$\max_{x_{t+1}(\theta^t)} \left\{ \sum_{\theta^t \in \Theta^t} \pi_{\theta^t} \{F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] + \beta \sum_{\theta_{t+1} \in \Theta} F[x_{t+1}(\theta^t), x_{t+2}(\theta^t, \theta_{t+1}), \theta_{t+1}]\pi_{\theta_{t+1}}\} \right\}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως το $x_{t+1}(\theta^t)$ πρέπει να επιλύει το παραπάνω πρόβλημα για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του θ^t, η οποία θα είναι γνωστή στην αρχή της περιόδου t,

$$\max_{x_{t+1}} \left\{ F(x_t, x_{t+1}, \theta_t) + \beta \sum_{\theta_{t+1} \in \Theta} F[x_{t+1}, x_{t+2}(\theta_{t+1}), \theta_{t+1}]\pi_{\theta_{t+1}} \right\}$$

ή

$$\max_{x_{t+1}} \left\{ F(x_t, x_{t+1}, \theta_t) + \beta E F[x_{t+1}, x_{t+2}(\theta_{t+1}), \theta_{t+1}] \right\}$$

(2) Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κατανέμονται σύμφωνα με την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ας υποθέσουμε πως οι τυχαίες μεταβλητές, $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι παίρνουν τιμές σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, $\Theta = [\underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}]$, έτσι ώστε:

$$\Pr(\theta_t \leq \tilde{\vartheta}) = \Psi(\tilde{\vartheta}) = \int_{\underline{\vartheta}}^{\tilde{\vartheta}} \psi(\vartheta) d\vartheta$$

όπου η $\psi(\vartheta)$ είναι μία αυστηρά θετική πραγματική συνάρτηση, τέτοια ώστε η πραγματική συνάρτηση $\Psi(\theta)$ είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα στο Θ. Επιπλέον, για τη συνάρτηση $\Psi(\theta)$ ισχύουν τα παρακάτω:

$\Psi(\vartheta) \in [0,1]$

$\Psi(\vartheta) \to 0$ καθώς $\vartheta \to \underline{\vartheta}$

$\Psi(\vartheta) \to 1$ καθώς $\vartheta \to \overline{\vartheta}$

Η συνάρτηση $\psi(\vartheta)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, και η συνάρτηση $\Psi(\theta)$ είναι η συνάρτηση κατανομής. Ο μέσος της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής θ_t ορίζεται ως:

$$E(\theta_t) = \int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} \vartheta \psi(\vartheta) d\vartheta = \int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} \vartheta d\Psi(\vartheta)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση είναι το απλό ολοκλήρωμα κατα Riemann και το ολοκλήρωμα κατά Riemann-Stieltjes, αντίστοιχα (βλέπε Bartle (1976), ενότητα 29). Υποθέτουμε ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα υπάρχουν, δηλαδή ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι για οποιαδήποτε συλλογή συνεχών τυχαίων μεταβλητών, όπως η θ^t, η από κοινού συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως:

$\tilde{\Psi}(\vartheta^t) = \Pr(\theta^t \le \vartheta^t) = \Pr(\theta_1 \le \vartheta_{\alpha_1}, \theta_2 \le \vartheta_{\alpha_2}, ..., \theta_t \le \vartheta_{\alpha_t})$, όπου:

$$\theta^t = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_t)$$
$$\theta^t \in \Theta^t = \mathop{X}_{i=1}^{t} \Theta$$
$$\vartheta^t = (\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\alpha_2}, ..., \vartheta_{\alpha_t})$$

Οι τυχαίες μεταβλητες $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_t$ είναι ανεξάρτητες. Κατα συνέπεια:

$$\tilde{\Psi}(\vartheta^t) = \Pr(\theta^t \le \vartheta^t) = \Pr(\theta_1 \le \vartheta_{\alpha_1}, \theta_2 \le \vartheta_{\alpha_2}, ..., \theta_t \le \vartheta_{\alpha_t}) =$$
$$\Pr(\theta_1 \le \vartheta_{\alpha_1}) \Pr(\theta_2 \le \vartheta_{\alpha_2}) ... \Pr(\theta_t \le \vartheta_{\alpha_t}) = \Psi(\vartheta_{\alpha_1})\ \Psi(\vartheta_{\alpha_2}) ... \Psi(\vartheta_{\alpha_t}) =$$
$$\int_{\underline{\vartheta}}^{\vartheta_{\alpha_1}} \psi(\vartheta) d\vartheta \int_{\underline{\vartheta}}^{\vartheta_{\alpha_2}} \psi(\vartheta) d\vartheta ... \int_{\underline{\vartheta}}^{\vartheta_{\alpha_t}} \psi(\vartheta) d\vartheta$$

Όπως και στην περίπτωση των ασυνεχών τυχαίων μεταβλητών, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής:

$$E\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \big| \theta_0\} =$$
$$E\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t]\} =$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} \int_{\vartheta^t \in \Theta^t} \beta^t F[x_t(\vartheta^{t-1}), x_{t+1}(\vartheta^t), \vartheta_{\alpha_t}] \Pr(\theta^t \le \vartheta^t) d\vartheta^t =$$
$$F(x_0, x_1, \theta_0) + \beta \int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} F[x_1, x_2(\theta_0, \vartheta_{\alpha_1}), \vartheta_{\alpha_1}] \psi(\vartheta_{\alpha_1}) d\vartheta_{\alpha_1} + ...$$
$$+\beta^t \int_{\vartheta^t \in \Theta^t} F[x_t(\vartheta^{t-1}), x_{t+1}(\vartheta^t), \vartheta_{\alpha_t}] \Pr(\theta^t \le \vartheta^t) d\vartheta^t$$

$$+\beta^{t+1}\int_{\vartheta^{t+1}\in\Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\vartheta^{t}), x_{t+2}(\vartheta^{t+1}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta^{t+1}\le\vartheta^{t+1})d\vartheta^{t+1}+\dots$$

Εάν το $x_{t+1}(\theta^{t})$ είναι μέρος της λύσης του Βασικού Στοχαστικού Δυναμικού Προβλήματος, τότε πρέπει επιλύει και το παρακάτω:

$$\max_{x_{t+1}(\theta^{t})}\{\beta^{t}\int_{\vartheta^{t}\in\Theta^{t}} F[x_{t}(\vartheta^{t-1}), x_{t+1}(\vartheta^{t}), \vartheta_{\alpha_{t}}]\Pr(\theta^{t}\le\vartheta^{t})d\vartheta^{t}$$
$$+\beta\int_{\vartheta^{t+1}\in\Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\vartheta^{t}), x_{t+2}(\vartheta^{t+1}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta^{t+1}\le\vartheta^{t+1})d\vartheta^{t+1}\}$$

Ισχύει όμως ότι:

$$\int_{\vartheta^{t+1}\in\Theta^{t+1}} F[x_{t+1}(\vartheta^{t}), x_{t+2}(\vartheta^{t+1}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta^{t+1}\le\vartheta^{t+1})d\vartheta^{t+1} =$$
$$\int_{\vartheta^{t}\in\Theta^{t}}\left\{\int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} F[x_{t+1}(\vartheta^{t}), x_{t+2}(\vartheta^{t}, \vartheta_{\alpha_{t+1}}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta_{t+1}\le\vartheta_{t+1})d\vartheta_{\alpha_{t+1}}\right\}\Pr(\theta^{t}\le\vartheta^{t})d\vartheta^{t}$$

Επομένως, εάν το $x_{t+1}(\theta^{t})$ είναι μέρος της λύσης του δυναμικού στοχαστικού προβλήματος, θα πρέπει να επιλύει και το εξής:

$$\max_{x_{t+1}(\theta^{t})}\{\int_{\vartheta^{t}\in\Theta^{t}}\{F[x_{t}(\vartheta^{t-1}), x_{t+1}(\vartheta^{t}), \vartheta_{\alpha_{t}}]$$
$$+\beta\int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} F[x_{t+1}(\vartheta^{t}), x_{t+2}(\vartheta^{t}, \vartheta_{\alpha_{t+1}}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta_{t+1}\le\vartheta_{t+1})d\vartheta_{\alpha_{t+1}}\}\Pr(\theta^{t}\le\vartheta^{t})d\vartheta^{t}\}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως το $x_{t+1}(\vartheta^{t})$ πρέπει επιλύει το παραπάνω πρόβλημα για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του θ^{t}, η οποία θα είναι γνωστή στην αρχή της περιόδου t,

$$\max_{x_{t+1}}\{F[x_{t}(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^{t}), \theta_{t}] + \beta\int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} F[x_{t+1}(\theta^{t}), x_{t+2}(\theta^{t}, \vartheta_{\alpha_{t+1}}), \vartheta_{\alpha_{t+1}}]\Pr(\theta_{t+1}\le\vartheta_{t+1})d\vartheta_{\alpha_{t+1}}\}$$

ή

$$\max_{x_{t+1}}\{F[x_{t}(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^{t}), \theta_{t}] + \beta\int_{\underline{\vartheta}}^{\overline{\vartheta}} F[x_{t+1}(\theta^{t}), x_{t+2}(\theta^{t}, \vartheta), \vartheta]\psi(\vartheta)d\vartheta\}$$

ή

$$\max_{x_{t+1}}\{F(x_{t}, x_{t+1}, \theta_{t}) + \beta EF[x_{t+1}, x_{t+2}(\theta_{t+1}), \theta_{t+1}]\}$$

(3) Ασυνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες σχηματίζουν μία αλυσίδα Markov

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή θ_t παίρνει τιμές στο σύνολο $\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_N\}$, και ότι για κάθε δεδομένη τιμή της θ_t, έστω την ϑ_j, η υπό συνθήκη πιθανότητα για την θ_{t+1} είναι η εξής:

$$\Pr(\theta_{t+1} = \vartheta_i \left| \theta_t = \vartheta_j \right.) = \pi_{ji}\,,\ 0 \le \pi_{ji} \le 1,\ \sum_{i=1}^{N} \pi_{ji} = 1$$

Από τη βασική θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε για μία τυχαία μεταβλητή, ω, η οποία παίρνει τιμές στο πεπερασμένο σύνολο Ω, και για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα Α και Β (τα οποία ειναι υποσύνολα του Ω), η υπό συνθήκη πιθανότητα του Α, δεδομένου του Β, δίδεται από:

$$\Pr(A \left| B \right.) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

με την προϋπόθεση ότι $\Pr(B) \ne 0$.

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων στην ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών θ^t, και λαμβάνωντας υπ'όψη ότι $\Pr(\theta_0) = 1$, παίρνουμε το εξής:

$$\Pr(\theta^{t+1} \left| \theta_0 \right.) = \Pr(\theta^t \cap \theta_{t+1}) = \Pr(\theta_{t+1} \left| \theta^t \right.) \Pr(\theta^t) = \Pr(\theta_{t+1} \left| \theta_t \right.) \Pr(\theta^t) = ...$$

$$= \Pr(\theta_{t+1} \left| \theta_t \right.) \Pr(\theta_t \left| \theta_{t-1} \right.) ... \Pr(\theta_1 \left| \theta_0 \right.) = \prod_{\nu=o}^{t} \pi_{\alpha_{\nu+1}\alpha_\nu} \equiv \pi_{\theta^{t+1}}$$

Κατά συνέπεια, στην περίπτωση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, η αντικειμενική συνάρτηση του βασικού στοχαστικού προβλήματος είναι η εξής:

$$E\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t]\} =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\theta^t \in \Theta^t} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \Pr(\theta^{t+1} \left| \theta_0 \right.) =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\theta^t \in \Theta^t} \beta^t F[x_t(\theta^{t-1}), x_{t+1}(\theta^t), \theta_t] \pi_{\theta^t} =$$

$$F(x_0,x_1,\theta_0)+\beta\sum_{\theta^1\in\Theta^1}F[x_1,x_2(\theta^1),\theta_1]\pi_{\theta^1}+\ldots+\beta^t\sum_{\theta^t\in\Theta^t}F[x_t(\theta^{t-1}),x_{t+1}(\theta^t),\theta_t]\pi_{\theta^t}$$
$$+\beta^{t+1}\sum_{\theta^{t+1}\in\Theta^{t+1}}F[x_{t+1}(\theta^t),x_{t+2}(\theta^{t+1}),\theta_{t+1}]\pi_{\theta^{t+1}}+\ldots$$

Επιπλέον,

$$\sum_{\theta^{t+1}\in\Theta^{t+1}}F[x_{t+1}(\theta^t),x_{t+2}(\theta^{t+1}),\theta_{t+1}]\pi_{\theta^{t+1}}=$$
$$\sum_{\theta^t\in\Theta^t}\pi_{\theta^t}\sum_{\theta_{t+1}\in\Theta}F[x_{t+1}(\theta^t),x_{t+2}(\theta^t,\theta_{t+1}),\theta_{t+1}]\Pr(\theta_{t+1}|\theta_t)$$

Επομένως, εάν το $x_{t+1}(\theta^t)$ είναι μέρος της λύσης του Βασικού Δυναμικού Στοχαστικού Προβλήματος, τότε πρέπει επίσης να αποτελεί λύση στο εξής πρόβλημα:

$$\max_{x_{t+1}}\{F(x_t,x_{t+1},\theta_t)+\beta\sum_{\theta_{t+1}\in\Theta}F[x_{t+1},x_{t+2}(\theta^{t+1}),\theta_{t+1}]\Pr(\theta_{t+1}|\theta_t)\}$$
ή
$$\max_{x_{t+1}}\left\{F(x_t,x_{t+1},\theta_t)+\beta E[F[x_{t+1},x_{t+2}(\theta_{t+1}),\theta_{t+1}]|\theta_t]\right\}$$

Παρατήρηση 1: Στις περιπτώσεις (1) – (3), εάν υπάρχει λύση στο βασικό δυναμικό στοχαστικό πρόβλημα, και εάν το υπό αίρεση σχέδιο, $\left\{x^*_{t+1}(\theta^t)\right\}_{t=0}^{\infty}$, αποτελέι λύση, τότε $\forall t\geq 0$, $x^*_{t+1}(\theta^t)$ πρέπει επίσης να επιλύει το παρακάτω πρόβλημα:

$$\max_{x_{t+1}}\{F[x^*_t(\theta^{t-1}),x_{t+1},\theta_t]+\beta E\left(F[x_{t+1},x^*_{t+2}(\theta^{t+1}),\theta_{t+1}]|\theta_t\right)\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_{t+1}\in\Gamma[x^*_t(\theta^{t-1}),\theta_t]$$
$$x^*_{t+2}(\theta^{t+1})\in\Gamma[x_{t+1},\theta_{t+1}]$$

Κατά συνέπεια, η γραμμικότητα του τελεστή του υπό συνθήκη μέσου συνεπάγεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Αναγκαίες Συνθήκες): Αν $F:A\to R$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου A και η ακολουθία

$\left\{x_{t+1}^{*}(\theta^{t})\right\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μια εσωτερική λύση στο Βασικό Πρόβλημα (IV.1) – (IV.3), τέτοια ώστε $x_{t+1}^{*}(\theta^{t}) \in \operatorname{int}\left\{\Gamma[x_{t}^{*}(\theta^{t-1}),\theta_{t}]\right\}$ $\forall t \geq 0$, τότε η ακολουθία $\left\{x_{t+1}^{*}(\theta^{t})\right\}_{t=0}^{\infty}$ πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$F_{2}[x_{t}^{*}(\theta^{t-1}),x_{t+1}^{*}(\theta^{t}),\theta_{t}]+\beta E\left\{F_{1}[x_{t+1}^{*}(\theta^{t}),x_{t+2}^{*}(\theta^{t+1}),\theta_{t+1}]\middle|\theta_{t}\right\}=0 \quad \forall t\geq 0 \tag{IV.4}$$

Η συνθήκη (IV.4) είναι η Στοχαστική Συνθήκη Euler.

Θεώρημα 2 (Ικανές Συνθήκες): Έστω ότι $F: A \to R$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου A και κοίλη. Έστω, ακόμα, ότι για την ακολουθία $\left\{x_{t+1}^{*}(\theta^{t})\right\}_{t=0}^{\infty}$ ισχύει οτι $x_{t+1}^{*}(\theta^{t}) \in \operatorname{int}\left\{\Gamma[x_{t}^{*}(\theta^{t-1}),\theta_{t}]\right\}$ $\forall t \geq 0$. Αν η ακολουθία $\left\{x_{t+1}^{*}(\theta^{t})\right\}_{t=0}^{\infty}$ ικανοποιεί τη στοχαστική συνθήκη Euler, την αρχική συνθήκη, καθώς και ότι:

$$\lim_{T\to\infty}\beta^{T}E\left\{F_{1}[x_{T}^{*}(\theta^{T-1}),x_{T+1}^{*}(\theta^{T}),\theta_{T}][x_{T}(\theta^{T-1})-x_{T}^{*}(\theta^{T-1})]\middle|\theta_{0}\right\}\geq 0 \tag{IV.5}$$

για κάποιο εφφικτό σχέδιο $\left\{x_{t+1}(\theta^{t})\right\}_{t=0}^{\infty}$, τότε αποτελεί λύση του Βασικού Στοχαστικού Προβλήματος.

Άσκηση 1: Αποδείξτε το Θεώρημα 2.

Παρατήρηση 2: Η συνθήκη (IV.5) καλλείται Στοχαστική Τερματική Συνθήκη. Στην περίπτωση που $F_{1}[x_{t}(\theta^{t-1}),x_{t+1}(\theta^{t}),\theta_{t}]\geq 0$ και $x_{t+1}(\theta^{t})\geq 0$, η συνθήκη (IV.5) έπεται από την παρακάτω συνθήκη, η οποία είναι ευκολότερα επαληθεύσιμη:

$$\lim_{T\to\infty}\beta^{T}E\left\{F_{1}[x_{T}^{*}(\theta^{T-1}),x_{T+1}^{*}(\theta^{T}),\theta_{T}]x_{T}^{*}(\theta^{T-1})\middle|\theta_{0}\right\}=0$$

Παρατήρηση 3: Η συνθήκη Euler και η Τερματική συνθήκη για το Νεοκλασσικό Στοχαστικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγεθυνσης δίνονται, αντιστοίχως, από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$-u_c(c_t(\theta^t)) + \beta E\left\{u_c(c_{t+1}(\theta^{t+1})[(1-\delta) + \alpha\theta_{t+1}k_{t+1}(\theta^t)]\middle|\theta_0\right\} = 0,\ \forall t \geq 0$$

$$\beta^T E\left\{u_c(c_T(\theta^T))k_{T+1}(\theta^T)\middle|\theta_0\right\} = 0, \text{ καθώς } T \to \infty$$

Επισημαίνουμε, ακόμη, ότι λόγω της αυστηρής κοιλότητας της προσωρινής συνάρτησης χρησιμότητας, και του περιορισμού ότι η κατανάλωση δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, έπεται ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ικανές.

Άσκηση 2: Υποθέστε ότι $x_t \in R_+^n$, $\theta_t \in R_+^m$ και ότι:

$$\Phi(x,y,\theta) = (1,\theta',x',y')A(1,\theta,x,y)'$$

όπου το σύμβολο (′) δηλώνει την αναστροφή διανυσμάτων ή μητρών. Δείξτε ότι η συνθήκη Euler μαιρνει την εξής μορφη:

$$B_2E_t(x_{t+2}) + B_1E_t(x_{t+1}) + B_0E_t(x_t) = C + D_1E_t(\theta_{t+1}) + D_0E_t(\theta_t)$$

για κατάλληλα ορισμένες μήτρες B_2, B_1, B_0, C, D_1, D_0.

Άσκηση 3:

(α) Δείξτε ότι η λύση του Στοχαστικού Νεοκλασσικού Υποδείγματος με $u(c) = \ln(c)$, $f(k) = k^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $\delta = 1$ και με θ^t τα οποία κατανέμονται ανεξάρτητα και με την ίδια συνάρτηση πιθανότητας δίδεται από:

$$k_{t+1} = \alpha\beta\theta_t k_t^\alpha$$

(β) Έστω ότι $\ln(\theta_t) \sim N(\mu,\sigma^2)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του άριστου σχεδίου $\left\{k_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ και δείξτε ότι:

$$\ln(k_t) \sim N(\mu_t,\sigma_t^2)$$

για κατάληλα ορισμένο μέσο και κατάλληλα ορισμένη διακύμανση, μ_t και σ_t^2.

(γ) Υπολογίστε την τιμή των μ_t και σ_t^2 καθώς $t \to \infty$.