Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ Ι:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ: Η ΣΥΝΘΗΚΗ EULER

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

02-03-2018

1. Το Βασικό Πρόβλημα των Δυναμικών Ντετερμινιστικών Οικονομικών σε Διακριτό Χρόνο (Το Νεοκλασικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης Cass-Koopmans):

1.1 Προκαταρκτικά:

Τα νοικοκυριά της οικονομίας είναι όμοια μεταξύ τους και ο χρονικός ορίζοντας κάθε νοικοκυριού είναι άπειρος. Ο αριθμός των νοικοκυριών είναι σταθερός και ίσος με n. Τα νοικοκυριά έχουν στην ιδιοκτησία τους παραγωγικούς συντελεστές και τις επιχειρήσεις. Οι επιχειρήσεις είναι όμοιες μεταξύ τους και παράγουν ένα ομοιογενές τελικό προϊόν, που μπορεί να καταναλώνεται ή να αποταμιεύεται και επενδύεται υπό την μορφή φυσικού κεφαλαίου. Κάθε επιχείρηση χρησιμοποιεί ως παραγωγικούς συντελεστές φυσικό κεφάλαιο και εργασία. Ο αριθμός των επιχειρήσεων είναι πεπερασμένος και ίσος με m.Οι αγορές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών είναι τέλεια ανταγωνιστικές.

1.2 Το Αντιπροσωπευτικό Νοικοκυριό

Εφόσον ο χρονικός ορίζοντας των νοικοκυριών είναι άπειρος και τα νοικοκυριά είναι ομοιογενή ως προς τις προτιμήσεις τους και τους οικονομικούς περιορισμούς που αντιμετωπίζουν, η ανάλυση μπορεί να επικεντρωθεί στη συμπεριφορά ενός αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από μια χρονικά διαχωρίσιμη συνάρτηση ευημερίας της μορφής:

$$u\left(c_0,c_1,\ldots\right)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U\left(c_t\right) \qquad \beta\in\left(0,1\right) \tag{I.1}$$

όπου:

c_t: κατάναλωση του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού την περίοδο

β: συντελεστής διαχρονικής προτίμησης ο οποίος χαρακτηρίζει την υπομονετικότητα του νοικοκυριού.

Για τη συνάρτηση χρησιμότητας $U:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Είναι C^1 στο $\mathbb{R}_{++}$, ήτοι συνεχώς διαφορίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Με άλλα λόγια, η πρώτη παράγωγος της U , U_{c_t} , υπάρχει και είναι συνεχής.

ii) Είναι αυστηρά αύξουσα ως προς την κατανάλωση, ήτοι $U_{c_t}>0$

iii) Αυστηρά κοίλη ως προς την κατανάλωση

iv) Συνθήκες Inada: $U_{c_t}\to 0$ καθώς $c_t\to\infty$ και $U_{c_t}\to\infty$ καθώς $c_t\to 0$

Ο εισοδηματικός περιορισμός του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού σε κάθε χρονική περίοδο περιγράφεται από την ανισότητα:

$$c_t+i_t\le r_tk_t+w_th_t+d_t\,,\forall t\ge 0 \tag{I.2}$$

όπου: i_t είναι η αποταμίευση και επένδυση του νοικοκυριού την περίοδο *t*, r_t , w_t και d_t είναι οι αμοιβές του νοικοκυριού για τις υπηρεσίες κεφαλαίου και εργασίας και τα μερίσματα από τις επιχειρήσεις, αντίστοιχα, την περίοδο *t*. Οι παραπάνω τιμές είναι διαιρεμένες με την τιμή του τελικού προϊόντος της περιόδου *t*. Δηλαδή, r_t , w_t είναι η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου και ο πραγματικός μισθός, αντίστοιχα, σε όρους τελικού προϊόντος.

Το κεφάλαιο ανά νοικοκυριό ακολουθεί το νόμο κίνησης:

$$k_{t+1}=\left(1-\delta\right)k_t+i_t\ ,\delta\in(0,1]\ ,\forall t\ge 0 \tag{I.3}$$

όπου k_t είναι το απόθεμα του κεφαλαίου στην αρχή της περιόδου *t* και δ είναι το ποσοστό (φυσικής) απόσβεσης του κεφαλαίου.

Οι υπηρεσίες εργασίας προσφέρονται ανελαστικά και το νοικοκυριό παρέχει μια μονάδα εργασίας σε κάθε περίοδο:

$$h_t=1,\forall t\ge 0 \tag{I.4}$$

Επιπλέον, οι επιλογές του νοικοκυριού δεσμεύονται από τους φυσικούς περιορισμούς:

$$c_t,k_{t+1}\ge 0\,,\ \forall t\ge 0 \tag{I.5}$$

και την αρχική συνθήκη:

$k_0 \in \mathbb{R}_+$ *δεδομένο* (I.6)

Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, στην αρχή της περιόδου, $t=0$, επιλέγει ένα σχέδιο κατανάλωσης, επένδυσης, προσφοράς κεφαλαίου και εργασίας ώστε να μεγιστοποιήσει τη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας (I.1) υπό τους περιορισμούς (I.2)-(I.6), θεωρώντας ότι οι τιμές $\{r_t, w_t, d_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι δεδομένες και δεν επηρεάζονται από την συμπεριφορά του. Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού διατυπώνεται, συμβολικά, ως εξής:

$$\max_{\{c_t, i_t, k_t, h_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \ \beta \in (0,1) \tag{I.7}$$

υπό τους περιορισμούς:

$c_t + i_t \le r_t k_t + w_t h_t + d_t, \forall t \ge 0$ (I.2)

$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t, \delta \in (0,1], \forall t \ge 0$ (I.3)

$h_t = 1, \forall t \ge 0$ (I.4)

$c_t, k_{t+1} \ge 0 \qquad \forall t \ge 0$ (I.5)

$k_0 \in \mathbb{R}_+$ *δεδομένο* (I.6)

<u>1.3 Η Αντιπροσωπευτική Επιχείρηση</u>

Οι επιχειρήσεις νοικιάζουν κεφάλαιο, προσλαμβάνουν εργατικό δυναμικό και παράγουν προϊόν σε κάθε χρονική περίοδο, t. Η τεχνολογία στην οποία έχει πρόσβαση κάθε επιχείρηση για την παραγωγή του προϊόντος χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση παραγωγής της μορφής $F(K_t, L_t)$, όπου:

K_t: εισροή κεφαλαίου την περίοδο t

L_t: εισροή εργασίας την περίοδο t

Για τη συνάρτηση παραγωγής $F: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ υποθέτουμε ότι:

i) Είναι C^1 στο $\mathbb{R}_{++}^2$

ii) Είναι αυστηρά αύξουσα ως προς το κεφάλαιο και την εργασία, ήτοι $F_K > 0, F_L > 0, \ \forall K, L > 0$

iii) Είναι αυστηρά κοίλη ως προς το κεφάλαιο και την εργασία
iv) $F(K,0)=F(0,L)=0$, ήτοι και οι δύο παραγωγικοί συντελεστές είναι απαραίτητοι για την παραγωγή
v) Ικανοποιεί τις συνθήκες *Inada:*
$F_K \to 0$ καθώς $K \to +\infty, F_L \to 0$ καθώς $L \to +\infty$
$F_K \to +\infty$ καθώς $K \to 0, F_L \to +\infty$ καθώς $L \to 0$
vi) Είναι ομογενής πρώτου βαθμού. Δηλαδή, $F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L),\ \forall (K,L)\in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \lambda>0$, ήτοι η συνάρτηση παραγωγής επιδεικνύει σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση σε κάθε χρονική περίοδο επιλέγει ένα σχέδιο εισροών κεφαλαίου, εργασίας και προσφερόμενου προϊόντος ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Η συνάρτηση (πραγματικών) κερδών της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης, σε κάθε χρονική περίοδο ,t, ορίζεται ως εξής:

$$\Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t L_t \tag{I.8}$$

όπου: Y_t είναι το προσφερόμενο προϊόν της επιχείρησης. Στις επιλογές της η αντιπροσωπευτική επιχείρηση δεσμεύεται από τους κάτωθι περιορισμούς:

Τον περιορισμό της τεχνολογίας:

$$Y_t \le F(K_t, L_t) \tag{I.9}$$

και τους φυσικούς περιορισμούς:

$$K_t, L_t, Y_t \ge 0 \tag{I.10}$$

Επίσης, θεωρεί ότι οι τιμές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών είναι δεδομένες και δεν επηρεάζονται από την συμπεριφορά της.

Το πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης μπορεί να διατυπωθεί συμβολικά, ως εξής:

$$\max_{Y_t, L_t, K_t} (Y_t - r_t K_t - w_t L_t) \qquad \text{(I.11)}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$Y_t \leq F\left(K_t, L_t\right) \qquad (1.9)$$
$$K_t, L_t, Y_t \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \qquad (1.10)$$

1.4 Το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας

Οι επιλογές των n νοικοκυριών και m επιχειρήσεων συντονίζονται μέσω του μηχανισμού της αγοράς, που καθορίζει την ποσότητα και την τιμή του κάθε εμπορεύσιμου αγαθού. Συγκεκριμένα, το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας της οικονομίας ορίζεται σαν μια ακολουθία:

$$\left\{(c_t^*, i_t^*, k_t^*, h_t^*); (Y_t^*, K_t^*, L_t^*); (w_t^*, r_t^*, d_t^*)\right\}_{t=0}^{\infty}$$

τέτοια ώστε:

1. Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, η ακολουθία $\left\{c_t^*, i_t^*, k_t^*, h_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ αποτελεί λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. (I.2)-(I.7)
2. Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, η ακολουθία $\left\{Y_t^*, K_t^*, L_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ αποτελεί λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης, (I.9)-(I.11)
3. Δεδομένων των ακολουθιών $\left\{c_t^*, i_t^*, h_t^*, k_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ και $\left\{Y_t^*, K_t^*, L_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ η ακολουθία$\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ εκκαθαρίζει τις αγορές, υπό την έννοια ότι εξισώνει την προσφορά με την αντίστοιχη ζήτηση σε κάθε χρονική περίοδο *t*:

Αγορά Τελικού Προϊόντος: $mY_t = n\left(c_t + i_t\right)$ (I.12)

Αγορά Υπηρεσιών Κεφαλαίου: $mY_t = n\left(c_t + i_t\right)$ .....(I.13)

Αγορά Εργασίας: $mL_t = nh_t = n$ (I.14)

Πρόταση 1: Το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας χαρακτηρίζεται από την λύση του προβλήματος:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right) k_t - k_{t+1} \right) \tag{I.15}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$0 \leq k_{t+1} \leq f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right) k_t \tag{I.16}$$

$$k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \textit{δεδομένο} \tag{I.17}$$

όπου:

$$f\left(k_t\right) \equiv F\left(k_t, 1\right) \tag{I.18}$$

$$r_t = f'\left(k_t\right) \tag{I.19}$$

$$w_t = f\left(k_t\right) - f'\left(k_t\right) k_t \tag{I.20}$$

$$d_t = 0 \tag{I.21}$$

Απόδειξη:
Λόγω της μορφής της αντικειμενικής συνάρτησης της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης και συγκεκριμένα, καθώς η συνάρτηση αυτή είναι αυστηρά αύξουσα στο Y_t, κάθε λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης πρέπει να ικανοποιεί την (I.9) με ισότητα. Άρα, το πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\max_{L_t, K_t \geq 0} [F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t]$$

Οι αναγκαίες συνθήκες για τη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι:

$$F_K\left(K_t, L_t\right) \leq r_t \; [F_K\left(K_t, L_t\right) < r_t \Leftrightarrow K_t = 0]$$
$$F_L\left(K_t, L_t\right) \leq w_t \; [F_L\left(K_t, L_t\right) < w_t \Leftrightarrow L_t = 0]$$

Όμως, οι συνθήκες Inada εξασφαλίζουν ότι μια εισροή δεν μπορεί να είναι μηδέν, γιατί τότε το οριακό της προϊόν είναι $+\infty$ και δεν είναι δυνατόν να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες για οιαδήποτε τιμή. Άρα, σε κάθε σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας πρέπει να ισχύει ότι:

$$F_K\left(K_t, L_t\right) = r_t \qquad \text{(I.22)}$$

$$F_L\left(K_t, L_t\right) = w_t \qquad \text{(I.23)}$$

Δηλαδή, κάθε παραγωγικός συντελεστής αμείβεται με το οριακό του προϊόν. Τώρα, η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας, δεδομένης της διαφορησιμότητας της συνάρτησης παραγωγής F συνεπάγεται :

$F\left(K_t, L_t\right) = F_K\left(K_t, L_t\right)K_t + F_L\left(K_t, L_t\right)L_t$ (Θεώρημα του Euler)

Και, λαμβανομένου υπόψη των (I.22) και (I.23), έχουμε:

$$r_t K_t + w_t L_t = F\left(K, L\right)$$

Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες ισορροπίας των αγορών, (I.12) -(I.14) και τον περιορισμό (I.4):

$$r_t\left(\frac{n}{m}\right)k_t + w_t\left(\frac{n}{m}\right)h_t = \frac{n}{m}F\left(k_t, h_t\right) => r_t k_t + w_t h_t = F\left(k_t, h_t\right) = F\left(k_t, 1\right) = f\left(k_t\right)$$

Η τελευταία ισότητα στην είναι η (I.18). Επίσης, έπεται από την παραπάνω σχέση, ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις (I.19)-(I.21).

Τώρα, δεδομένου ότι η συνάρτηση παραγωγής F είναι αυστηρά κοίλη, οι συνθήκες (I.22)-(I.23) είναι και ικανές για την μοναδική λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης. Άρα, δεδομένου του περιορισμού (I.4), η λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης και οι συνθήκες ισορροπίας των αγορών εξασφαλίζονται, τότε και μόνο τότε που ισχύουν οι συνθήκες (I.18)-(I.21). Για να αποδείξουμε την Πρόταση 1, παραμένει να δείξουμε ότι η λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, είναι η ίδια με την λύση του προβλήματος (I.15)-(I.17), δεδομένου των συνθηκών (I.18)-(I.21).

Λόγω της υπόθεσης ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αυστηρά αύξουσα, ο περιορισμός (I.2) θα ικανοποιείται μόνο με ισότητα στην όποια λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

Αυτό σημαίνει ότι στην λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού., ισχύει ότι:

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t h_t + d_t \tag{I.24}$$

Συνδυάζοντας την (I.24) με τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου, (I.3), προκύπτει ότι:

$$c_t + k_{t+1} = r_t k_t + w_t h_t + (1-\delta) k_t \tag{I.25}$$

Αλλά, από τις συνθήκες (I.18) και (I.21), μπορούμε να απαλλαχτούμε από τους όρους w_t, r_t και d_t, οπότε ο περιορισμός του νοικοκυριού (I.25), μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta) k_t \tag{I.26}$$

Η σχέση (I.26) και εφόσον αντικαταστήσουμε ως προς c_t στην συνάρτηση χρησιμότητας, μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα του νοικοκυριού ως το πρόβλημα (I.15)-(I.17). Ο περιορισμός (I.16), δεδομένης της (I.26). είναι ο ισοδύναμος με τον περιορισμό (I.5) και ο περιορισμός (I.17) είναι ο ;ίδιος με τον περιορισμό (I.6). Q.E.D.

Άσκηση I.1: Για την συνάρτηση παραγωγικότητας $f(\bullet)$δείξτε ότι οι περιορισμοί στην συνάρτηση παραγωγής, $F(\bullet,\bullet)$, συνεπάγονται ότι: $f:\Re_+ \to \Re_+$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, αυστηρά αύξουσα, αυστηρά κοίλη, $f(0)=0, \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, and \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$.

Η Πρόταση 1 είναι σημαντική για δύο λόγους. Πρώτον (Οικονομική Θεωρία), το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας προκύπτει από την λύση του προβλήματος ενός «κοινωνικού σχεδιαστή», που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού υπό τον περιορισμό των διαθέσιμων οικονομικών πόρων και της τεχνολογίας. Αυτό είναι μία συνέπεια του Πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος των Οικονομικών της Ευημερίας. Δηλαδή, κάθε σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας είναι βέλτιστο κατά Pareto (Pareto Optimum).

Δεύτερον (Πρακτικό Όφελος στον Υπολογισμό): Το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή είναι απλούστερο από την εύρεση του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας. Στο πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή το ζητούμενο είναι η ακολουθία του κεφαλαίου ανά νοικοκυριό, $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Ακολούθως, όλες οι άλλες μεταβλητές που χαρακτηρίζουν το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας δίδονται από εξισώσεις.

Άσκηση Ι.2: Βρείτε τις εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας, $\left\{(c_t^*, i_t^*, k_t^*, h_t^*);(Y_t^*, K_t^*, L_t^*);(w_t^*, r_t^*, d_t^*)\right\}_{t=0}^{\infty}$, αν είναι γνωστή ή ακολουθία του κεφαλαίου ανά νοικοκυριό, $\left\{k_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$.

2. **Το Βασικό Δυναμικό Ντετερμινιστικό Πρόβλημα σε Διακριτό Χρόνο**

2.1 Ορισμοί

Το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή (Ι.15)-(Ι.17) είναι της μορφής:

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) \tag{I.27}$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_{t+1} \in \Gamma\left(x_t\right) \quad \forall\ t \geq 0 \quad . \tag{I.28}$$

$$x_0 \in \mathrm{X} \qquad \textit{δεδομένο} \tag{I.29}$$

όπου:

x_t διάνυσμα πραγματικών αριθμών που χαρακτηρίζει την κατάσταση του συστήματος στην αρχή της περιόδου t και καλείται μεταβλητή κατάστασης (state variable)

$\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ μία ακολουθία (sequence) διαδοχικών καταστάσεων του συστήματος ή ένα σχέδιο (plan) ή ένα μονοπάτι (path) που ακολουθεί το σύστημα καθ' όλο το χρονικό ορίζοντα

X το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του συστήματος, δηλαδή το σύνολο των δυνατών τιμών της μεταβλητής κατάστασης (state variable)

$\Gamma\left(X\right) \to X$ αντιστοιχία που περιγράφει περιορισμούς στην μετάβαση του συστήματος από την μία χρονική περίοδο στην επόμενη. Δηλαδή, $\forall x \in X,\ \Gamma(x)$ είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της μεταβλητής κατάστασης (state variable) της επόμενης περιόδου αν η μεταβλητή κατάστασης (state variable) την τρέχουσα περίοδο είναι x

$\beta \in (0,1)$ συντελεστής διαχρονικής προτίμησης ή διαχρονικής προεξόφλησης (discount factor)

$\Phi : A \to \mathbb{R}$ προσωρινή αντικειμενική συνάρτηση (temporary objective function)

$A = \{(x,y) : y \in \Gamma(x), x \in X\} \subseteq X^2$ Σύνολο των δυνατών συνδυασμών δύο διαδοχικών καταστάσεων του συστήματος

Άσκηση Ι.3: (α) Βρείτε μια μεταβλητή $x_t \in \mathbb{R}_+$, μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}_+ x \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ και μια αντιστοιχία $\Gamma(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$, που αντιστοιχούν στο πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή (Ι.15)-(Ι.17).
(β) Βρείτε μια μεταβλητή $x_t \in \mathbb{R}^2_+$, μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}^2_+ x \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ και μια αντιστοιχία $\Gamma(\mathbb{R}^2_+) \to \mathbb{R}^2_+$, που αντιστοιχούν στο πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή (Ι.15)-(Ι.17). [Βοήθεια για το (β): $x_t = (x_{1_t}, x_{2_t}) = (c_{t-1}, k_t)$]

Ένα σχέδιο (plan) $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ τέτοιο ώστε:

$x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \quad \forall\, t \geq 0$

$x_0 \in \mathrm{X}$ *δεδομένο*

ονομάζεται δυνατό ή εφικτό σχέδιο (feasible plan).

Ένα σχέδιο $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ που είναι δυνατό (feasible plan), αποκαλείται βέλτιστο σχέδιο (optimal plan) εάν και μόνο εάν

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi(x_t, x_{t+1}) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi(x^*_t, x^*_{t+1}) \quad \text{για όλα τα δυνατά σχέδια } \{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$$

Ένα σχέδιο $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ που είναι δυνατό (feasible plan), αποκαλείται μοναδικό βέλτιστο σχέδιο (unique optimal plan) αν και μόνο αν

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) < \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right)$$ για όλα τα δυνατά σχέδια $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$

2.2 Η Συνθήκη Euler:

Παρατήρηση 1: Έστω ότι υπάρχει λύση για το Βασικό Πρόβλημα (Ι.27)-(Ι.29) και έστω η ακολουθία $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ μια τέτοια λύση. Τότε $\forall t \geq 0$ το x_{t+1}^* θα πρέπει να είναι λύση του προβλήματος:

$$\max_{\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}} \left[\Phi\left(x_t^*, x_{t+1}\right) + \beta \Phi\left(x_{t+1}, x_{t+2}^*\right)\right] \tag{I.30}$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_{t+1} \in \Gamma\left(x_t^*\right) \tag{I.31}$$

$$x_{t+2}^* \in \Gamma\left(x_{t+1}\right) \tag{I.32}$$

$$x_t^*, x_{t+2}^* \in \mathrm{X} \qquad \textit{δεδομένα} \tag{I.33}$$

Απόδειξη

Έστω, αντίθετα, ότι το x_{t+1}^* δεν αποτελεί λύση του προβλήματος (Ι.30)-(Ι.33). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\hat{x}_{t+1}$ τέτοιο ώστε:

$$\Phi\left(x_t^*, \hat{x}_{t+1}\right) + \beta \Phi\left(\hat{x}_{t+1}, x_{t+2}^*\right) \geq \Phi\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta \Phi\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right)$$

Οι σειρές $\begin{matrix} x_1^*, \ldots\ldots x_{t+1}^*, x_{t+2}^*, \ldots\ldots\ldots \\ x_1^*, \ldots\ldots \hat{x}_{t+1}, x_{t+2}^*, \ldots\ldots\ldots \end{matrix}$ είναι ίδιες εκτός από τον όρο x_{t+1}.

Για την ακολουθία $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ το απειράθροισμα $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) \to \Psi^*$

Για $x_1^*, \ldots\ldots \hat{x}_{t+1}, x_{t+2}^*, \ldots\ldots\ldots$ το απειράθροισμα $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) \to \hat{\Psi}$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται ότι $\hat{\Psi} \geq \Psi^*$ γεγονός που σημαίνει ότι η ακολουθία $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ δεν αποτελεί λύση του Βασικού Προβλήματος. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η ακολουθία $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ αποτελεί λύση του Βασικού Προβλήματος. Άρα, το x^*_{t+1} αποτελεί λύση του προβλήματος (I.30)-(I.33). Q.E.D.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή τόσο η παρατήρηση όσο και η απόδειξη, η ερμηνεία της παρατήρησης είναι ότι καμία εφικτή μεταβολή στο μονοπάτι $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ σε μία περίοδο t δεν μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση επί της άριστης πολιτικής $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Εάν έστω το x^*_{t+1} δεν ήταν λύση στο πρόβλημα (I.30)-(I.33), τότε με την επιλογή ενός άλλου εφικτού $\hat{x}_{t+1}$ που να είναι λύση στο παραπάνω πρόβλημα, και διατηρώντας κατά άλλα το μονοπάτι ως είχε, θα ήταν δυνατό να αυξήσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης-του απειραθροίσματος- της (I.27) κατά το μέγεθος αύξησης του αθροίσματος των δύο μόνο επηρεαζόμενων διαδοχικών όρων, όπως τούτοι εμφανίζονται στην (I.30). Τότε, όμως, η αλλαγή αυτή την περίοδο $t+1$ του σχεδίου θα οδηγούσε σε βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης (I.27) πέραν της τιμής που δίνει η ακολουθία $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Συνεπώς, το να είναι το x^*_{t+1} λύση στο στατικό πρόβλημα (I.30)-(I.33), $\forall t \geq 0$, είναι αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί το $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ λύση στο δυναμικό πρόβλημα (I.27)-(I.29).

Η Παρατήρηση 1 έχει ως άμεση συνέπεια το εξής βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 1 (Αναγκαίες Συνθήκες): *Αν $X \subseteq \mathbb{R}^n$, δεδομένου ότι $\Phi \in C^1[\operatorname{int}(A)]$, ήτοι ότι η Φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου A και ότι η ακολουθία $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μια εσωτερική λύση στο Βασικό Πρόβλημα (I.27)-(I.29),δηλαδή, τέτοια ώστε $x^*_{t+1} \in \operatorname{int}[\Gamma(x^*_t)]$ $\forall t \geq 0$, τότε η ακολουθία $\{x^*_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:*

$$\Phi_2\left(x^*_t, x^*_{t+1}\right) + \beta\Phi_1\left(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}\right) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.34}$$

Εάν επιπροσθέτως ισχύει ότι $F \in C^2\left[\operatorname{int}(A)\right]$, ήτοι η F είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο εσωτερικό του A, τότε πρέπει επίσης να ισχύει ότι η μήτρα:

$\Phi_{22}\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta\Phi_{11}\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, $\forall t \geq 0$, (I.35)

Η συνθήκη (I.34) ονομάζεται **Συνθήκη Euler** (Euler Condition) ενώ η συνθήκη (I.35) ονομάζεται **Συνθήκη Legendre**. Και οι δύο συνθήκες είναι αναγκαίες συνθήκες για βέλτιστη εσωτερική λύση. Το σύστημα εξισώσεων (I.34) είναι ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού και σε συνδυασμό με τις n αρχικές συνθήκες της (1.34) μας δίνει μια οικογένεια λύσεων με n παραμέτρους. Τούτο σημαίνει ότι χρειαζόμαστε επιπλέον n εξισώσεις προκειμένου να ξεχωρίσουμε από αυτή την οικογένεια λύσεων εκείνη που είναι πραγματικά η βέλτιστη. Οι επιπλέον n εξισώσεις παρέχονται από την Τερματική Συνθήκη (Transversality Condition), για την οποία θα γίνει λόγος στην επόμενη διάλεξη.

Παρατήρηση 2 (Γωνιακή Λύση): Αν $\Gamma(x) = [0, \infty), \quad \forall t \geq 0$, η λύση του προβλήματος (I.27)-(I.29), μπορεί να είναι ένα σχέδιο με μηδενικές τιμές για κάποια x_{t+1}^*. Τότε η συνθήκη Euler έχει την μορφή:

$$\Phi_2\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta\Phi_1\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right) \leq 0 \;\Leftrightarrow \left(= 0 \;\text{ αν }\; x_{t+1}^* > 0\right) \quad \forall t \geq 0 \tag{I.36}$$

Παρατήρηση 3 (Μορφή Επαναλαμβανόμενης Λύσης): Μία εναλλακτική διατύπωση του προβλήματος (I.30-I.33) αποτελεί το εξής:

$$\max_{y \in \Gamma(x)} G(y) = \left[\Phi(x, y) + \beta\Phi(y, z)\right] \tag{I.37}$$

όπου: $x = x_t, y = x_{t+1}, z = x_{t+2}$

Η διατύπωση αυτή είναι χρήσιμη γιατί μας απαλλάσσει από τους δείκτες του χρόνου και διευκρινίζει ότι η λύση του βασικού δυναμικού ντετερμινιστικού προβλήματος σε διακριτό χρόνο είναι επαναλαμβανόμενη και για τον χαρακτηρισμό της δεν απαιτείται η αναφορά στις χρονικές περιόδους. Με τον παραπάνω συμβολισμό, η **Συνθήκη Euler** για εσωτερική λύση, (I.34), μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$G'(y)=\Phi_2(x,y)+\beta\Phi_1(y,z)=0 \qquad \forall t\in N_+ \tag{I.38}$$

Αν πάλι υποθέσουμε ότι $\Gamma(x)=[0,\infty) \quad \forall t\geq 0$, τότε

$$\max_{y\in[0,\infty)} G(y)=\left[\Phi(x,y)+\beta\Phi(y,z)\right] \tag{I.39}$$

Στην περίπτωση αυτή, που δεν έχουμε επικαλεσθεί τον περιορισμό ότι η λύση είναι εσωτερική, η **Συνθήκη Euler** παίρνει την μορφή:

$$G'(y)=\Phi_2(x,y)+\beta\Phi_1(y,z)\leq 0 \quad (=0 \Leftrightarrow \; G'(y)=0) \tag{I.40}$$

2.3 Παραδείγματα Συνθήκης Euler

Στην Άσκηση 1.3 δείξαμε ότι το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή στο Νεοκλασικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης Cass-Koopmans είναι της μορφής:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U[f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1}] \tag{I.15}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$0\leq k_{t+1}\leq f(k_t)+(1-\delta)k_t \tag{I.16}$$

$$k_0\in\mathbb{R}_+ \quad \textit{δεδομένο} \tag{I.17}$$

μπορεί να πάρει τη μορφή του βασικού δυναμικού ντετερμινιστικού προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t F(x_t,x_{t+1}) \tag{I.27}$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_{t+1}\in\Gamma(x_t) \quad \forall\, t\geq 0 \tag{I.28}$$

$$x_0\in \mathrm{X} \qquad \textit{δεδομένο} \tag{I.29}$$

με τις εξής αντικαταστάσεις:

$$x_t = k_t \tag{I.41}$$

$$\mathrm{X} = [0, \infty) \tag{I.42}$$

$$F\left(x_t, x_{t+1}\right) = U\left(f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right)k_t - k_{t+1}\right) \tag{I.43}$$

$$\Gamma\left(x_t\right): 0 \le k_{t+1} \le f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right)k_t \tag{I.44}$$

Από το Θεώρημα 1, αν υπάρχει εσωτερική λύση στο Πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή, τότε αυτή η λύση πρέπει να ικανοποιεί την σχέση (συνθήκη του Euler):

$$U'\left(c_t\right) = \beta U'\left(c_{t+1}\right)\left[f'\left(k_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right)\right] \quad \forall t \ge 0$$

ή (1.45)

$$\frac{U'\left(c_t\right)}{\beta U'\left(c_{t+1}\right)} = \left[f'\left(k_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right)\right] \qquad \forall t \ge 0$$

Η οικονομική ερμηνεία της **Συνθήκη Euler** είναι ότι σε κάθε χρονική περίοδο το νοικοκυριό εξισώνει τον οριακό λόγο υποκατάστασης της επόμενης περιόδου με κατανάλωση την παρούσα περίοδο, με το μικτό πραγματικό κόστος χρήσης του κεφαλαίου. Όπου $f'\left(k_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right)$ είναι το κόστος ευκαιρίας για μια μονάδα κεφαλαίου που διατίθεται στην αρχή της περιόδου t αλλά δεν καταναλώνεται κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής. Εναλλακτικά, $\beta\left[f'\left(k_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right)\right]$ είναι η παρούσα αξία μιας μονάδας κεφαλαίου που δημιουργείται την τρέχουσα περίοδο t και χρησιμοποιείται την επόμενη.

Άσκηση I.4: Δείξτε ότι οι περιορισμοί στην συνάρτηση προσωρινής χρησιμότητας, $U(\bullet)$, οι ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγικότητας, $f\left(k_t\right)$ (Άσκηση 1.1) και ο περιορισμός $k_0 \in (0, \infty)$, συνεπάγονται ότι η λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, είναι εσωτερική. Δηλαδή, ισχύει ότι: k_{t+1} και $c_t > 0$ ή $k_{t+1} < f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right)k_t$, $\forall t \ge 0$.

[Βοήθεια: Η συνθήκη Euler, επιτρέποντας στην λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, $k_{t+1} = 0$, έχει την μορφή:

$$-U'\left[f\left(k_t\right)-k_{t+1}+\left(1-\delta\right)k_t\right]+\beta U'\left[f\left(k_{t+1}\right)-k_{t+2}+\left(1-\delta\right)k_{t+1}\right]\left[f'\left(k_{t+1}\right)+\left(1-\delta\right)\right]\leq 0$$
$$\Leftrightarrow\left(=0 \text{ αν } k_{t+1}>0\right) \qquad \forall t\geq 0$$

Στην συνέχεια, χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες *Inada*, για να δείξτε ότι η παραπάνω σχέση δεν μπορεί να ισχύει με αυστηρή ανισότητα.]

Άσκηση Ι.5: Βρείτε την συνθήκη του Euler για εσωτερική λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, στις εξής περιπτώσεις:

(α) $U\left(c_t\right)=\dfrac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma>1$ και $f\left(k_t\right)=\mathrm{A}k_t^{\alpha}, \mathrm{A}>0 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha\in(0,1)$

(β) $U\left(c_t\right)=\ln c_t$, $f\left(k_t\right)=\mathrm{A}k_t^{\alpha}, \mathrm{A}>0 \;\kappa\alpha\iota\; \alpha\in(0,1)$ Επίσης, η απόσβεση του κεφαλαίου είναι πλήρης, υπό την έννοια ότι: $\delta=1$.

(γ) $U\left(c_t\right)=\varsigma c_t-\left(\eta/2\right)c_t^{\,2}$, $f\left(k_t\right)=\mathrm{A}k_t, \mathrm{A}>0$

(δ) Ο νόμος κίνησης του κεφαλαίου ανά νοικοκυριό είναι Cobb-Douglas:

$k_{t+1}=\Omega k_t^{\varphi}i_t^{\chi}$,

και