Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ III:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ BELLMAN

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

02-03-2018

1. Η Συναρτησιακή Εξίσωση του Bellman

Μία εναλλακτική προσέγγιση στο Βασικό Πρόβλημα των Ντετερμινιστικών Δυναμικών Οικονομικών είναι αυτή της συναρτησιακής εξίσωσης του Bellman. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε μία διαφορετική εξαγωγή της συνθήκης Euler. Ανεξάρτητα από αυτό όμως, η συναρτησιακή εξίσωση του Bellman είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την απόδειξη ύπαρξης της λύσης του Βασικού Προβλήματος, όπως και για τον χαρακτηρισμό των ιδιοτήτων της λύσης αυτής. Η βασική ιδέα είναι ότι η λύση είναι «επαναλαμβανόμενη» και αυτό δίνει την δυνατότητα αντί να επιζητούμε ένα σχέδιο που είναι μία ακολουθία απείρων όρων για την μεταβλητή κατάστασης να βρούμε την λύση μιας συναρτησιακής εξίσωσης.

Για να αποδείξουμε την τελευταία πρόταση είναι πρόσφορο να ξεκινήσουμε από ένα πρόβλημα με πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και στην συνέχεια να εξετάσουμε τι συμβαίνει καθώς ο χρονικός ορίζοντας τείνει προς το άπειρο. Για το λόγο αυτό θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) + W_0\left(x_{T+1}\right) \right] \tag{III.1}$$

υπό τους περιορισμούς: (III.2)

$$x_{t+1} \in \Gamma\left(x_t\right), \quad \forall t \in N_+$$

$$x_0 \in \mathrm{X} \tag{III.3}$$

όπου, $W_0(\cdot): X \to \mathbb{R}$, μπορεί να θεωρηθεί σαν την παρούσα αξία που αποδίδεται στο να πάρει η μεταβλητή κατάστασης την τιμή x_{T+1}, στο τέλος της περιόδου T.

<u>Παρατήρηση ΙΙΙ.1:</u> Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης στην (ΙΙΙ.1)-(ΙΙΙ.3), μπορεί εναλλακτικά να αποδοθεί ως κάτωθι:

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) + W_0\left(x_{T+1}\right) \right] =$$

$$= \max_{x_1, x_2, \ldots x_t, x_{t+1}, \ldots x_T, x_{T+1}} \left[\begin{array}{l} \Phi\left(x_0, x_1\right) + \beta\Phi\left(x_1, x_2\right) + \ldots + \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) + \\ \quad + \beta^{t+1}\Phi\left(x_{t+1}, x_{t+2}\right) + \ldots + \beta^T \Phi\left(x_T, x_{t+1}\right) + W_0\left(x_{T+1}\right) \end{array} \right] =$$

$$=\max_{x_1}\left\{\Phi(x_0,x_1)+\max_{x_2}\left\{\beta\Phi(x_1,x_2)+\ldots+\max_{x_{t+1}}\left\{\beta^t\Phi(x_t,x_{t+1})+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\max_{x_{t+2}}\left\{\beta^{t+1}\Phi(x_{t+1},x_{t+2})+\ldots+\max_{x_{T+1}}\left\{\beta^T\Phi(x_T,x_{T+1})+W_0(x_{T+1})\right\}\ldots\right\}\ \right\}\ldots\right\}\ \right\}=$$

$$=\max_{x_1}\left\{\Phi(x_0,x_1)+\max_{x_2}\left\{\beta\Phi(x_1,x_2)+\ldots+\max_{x_{t+1}}\left\{\beta^t\Phi(x_t,x_{t+1})+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\max_{x_{t+2}}\left\{\beta^{t+1}\Phi(x_{t+1},x_{t+2})+\ldots+\max_{x_T}\left\{\beta^{T-1}\Phi(x_{T-1},x_T)+W_1(x_T)\right\}\ldots\right\}\ \right\}\ldots\right\}\ \right\} \qquad \text{(III.4)}$$

όπου

$$W_1(x_T)\equiv\max_{\substack{x_{T+1}\in\Gamma(x_T)\\ x_T\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\beta^T\Phi(x_T,x_{T+1})+W_0(x_{T+1})\right] \qquad \text{(III.5)}$$

ή,

$$W_1(x_T)=\beta^T\Phi\left(x_{T,}h(x_T)\right)+W_0\left(h(x_T)\right) \qquad \text{(III.6)}$$

όπου:

$$x_{T+1}^*=h_0(x_T)\equiv\underset{\substack{x_{T+1}\in\Gamma(x_T)\\ x_T\in X\ \text{δεδομένο}}}{\arg\max}\left[\beta^T\Phi(x_T,x_{T+1})+W_0(x_{T+1})\right] \qquad \text{(III.7)}$$

Αν, τώρα, ορίσουμε τις συναρτήσεις:

$$W_2(x_{T-1})=\max_{\substack{x_T\in\Gamma(x_{T-1})\\ x_{T-1}\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\beta^{T-1}\Phi(x_{T-1},x_T)+W_1(x_T)\right]$$

…

$$W_{t+1}(x_t)=\max_{\substack{x_{t+1}\in\Gamma(x_T)\\ x_t\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\beta^t\Phi(x_t,x_{t+1})+W_t(x_{t+1})\right] \qquad \text{(III.8)}$$

…

$$W_{T+1}(x_t)=\max_{\substack{x_1\in\Gamma(x_T)\\ x_0\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\Phi(x_0,x_1)+W_T(x_1)\right]$$

τότε, έπεται ότι:

$$W_{T+1}(x_0)=\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^T}\left[\sum_{t=0}^T\beta^t\Phi(x_t,x_{t+1})+W_0(x_{T+1})\right] \qquad \text{(III.9)}$$

όπου: $x_{t+1}\in\Gamma(x_t),\quad \forall t\in N_+$ και $x_0\in \mathrm{X}$ δεδομένο

Η λύση του προβλήματος (ΙΙΙ.1)-(ΙΙΙ.3) μπορεί να προσδιοριστεί σχηματικά, πηγαίνοντας προς τα πίσω (δηλαδή, από την τελευταία περίοδο, T , προς την περίοδο 0) ως εξής:

$$
\begin{aligned}
& x_{T+1} = h_0(x_T) \to W_1(x_T) \to x_T = h_1(x_{T-1}) \to W_2(x_{T-1}) \\
& \to \ldots \to x_{T-j+1} = h_j(x_{T-j}) \to W_{j+1}(x_{T-j}) \to \ldots \\
& \to x_2 = h_{\mathrm{T}-1}(x_1) \to W_{\mathrm{T}}(x_1) \to x_1 = h_{\mathrm{T}}(x_0) \to W_{\mathrm{T}+1}(x_0)
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι:

$$
W_{j+1}(x_{T-j}) = \max_{x_{T-j+1}} \left[\beta^{T-j} \Phi(x_{T-j}, x_{T+1-j}) + W_j(x_{T-j+1}) \right], \quad j = 0,1,\ldots,T \tag{III.10}
$$

όπου: $x_{\mathrm{T}-j+1} \in \Gamma(x_{T-j}),$ και $x_{T-j} \in \mathrm{X}$ δεδομένο

Πολλαπλασιάζοντας με β^{j-T} , έχουμε:

$$
\begin{aligned}
V_{j+1}(x_{T-j}) \equiv \beta^{j-T} W_{j+1}(x_{T-j}) &= \max_{x_{T-j+1}} \left[\Phi(x_{T-j}, x_{T+1-j}) + \beta \beta^{j-T-1} W_j(x_{T-j+1}) \right] = \\
&= \max_{x_{T-j+1}} \left[\Phi(x_{T-j}, x_{T+1-j}) + \beta V_j(x_{T-j+1}) \right]
\end{aligned} \tag{III.11}
$$

και καθώς η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $t = T - j$, έχουμε:

$$
V_{j+1}(x_t) = \max_{\substack{x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \\ x_t \in X \ \text{δεδομένο}}} \left[\Phi(x_t, x_{t+1}) + \beta V_j(x_{t+1}) \right] \tag{III.12}
$$

Καθώς η περίοδος t μπορεί να είναι οποιαδήποτε, η (ΙΙΙ.12) είναι ισοδύναμη με την :

$$
\tilde{V}_{j+1}(x) = \max_{\substack{y \in \Gamma(x) \\ x \in X \ \text{δεδομένο}}} \left[\Phi(x, y) + \beta \tilde{V}_j(y) \right]
$$

$$
V_{j+1}(x) = \max_{\substack{y \in \Gamma(x) \\ x \in X \ \text{δεδομένο}}} \left[\Phi(x, y) + \beta V_j(y) \right] \tag{III.13}
$$

Η (ΙΙΙ.3) είναι μια επαναλαμβανόμενη σχέση που ορίζει την συνάρτηση $V_{j+1}(\bullet)$ για κάθε δεδομένη συνάρτηση $V_j(\bullet)$. Το γεγονός αυτό αποτελεί την βάση για το εξής σπουδαίο θεώρημα, που αποδεικνύεται στο Παράρτημα.

Θεώρημα 3 (Η Συναρτησιακή Εξίσωση του Bellman στην περίπτωση Φραγμένης Προσωρινής αντικειμενικής συνάρτησης):

(α) Ξεκινώντας από οποιαδήποτε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $V_0(\bullet):\mathrm{X}\to\mathbb{R}$, υπό προϋποθέσεις, η ακολουθία των συναρτήσεων που προκύπτει διαδοχικά από την (ΙΙΙ.3), $\left\{V_j\right\}_{j=0}^{\infty}$, συγκλίνει σε μία μοναδική συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $V(\bullet):\mathrm{X}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$V(x)=\max_{\substack{y\in\Gamma(x)\\ x\,\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\Phi(x,y)+\beta V(y)\right] \qquad \text{(III.14)}$$

(β) $$V(x_0)=\max_{\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\Phi(x_t,x_{t+1})\right] \qquad \text{(III.15)}$$

όπου: $x_{t+1}\in\Gamma(x_t),\quad \forall t\in N_+$ και $x_0\in\mathrm{X}$ δεδομένο.

(γ) Μια ομάδα ικανών προϋποθέσεων για την σύγκλιση στο (α) είναι η εξής:
(ι) Το $X\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό
(ιι)Η $\Phi(x,y)$ είναι φραγμένη και συνεχής, $\forall(x,\mathrm{y})\in A$
(ιιι)Το σύνολο $\Gamma(x)$ είναι μη-κενό και συμπαγές, $\forall x\in X$
(δ) Αν, επιπλέον:

(ιν) Η $\Phi(x,y)$ είναι κοίλη, $\forall(x,\mathrm{y})\in A$
(ν) Το σύνολο $\Gamma(x)$ είναι κυρτό
τότε η V είναι αυστηρά κοίλη.

<u>Παρατήρηση ΙΙΙ.2:</u> Δεδομένων των (ι) –(ν), η λύση του Βασικού Ντετερμινιστικού Προβλήματος σε διακριτό χρόνο, $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, προκύπτει κατά μοναδικό τρόπο από την σχέση:

$$x_{t+1}^*=h(x_t^*)\equiv\operatorname*{arg\,max}_{\substack{x_{t+1}\in\Gamma(x_t^*)\\ x_t^*\in X\ \text{δεδομένο}}}\left[\Phi(x_t^*,x_{t+1})+\beta V(x_{t+1})\right],\forall t\in\mathbb{N}_+ \qquad \text{(III.16)}$$

ξεκινώντας από $x_0^*=x_0\in\mathrm{X}$ δεδομένο.
Η βασική χρησιμότητα του θεωρήματος αυτού πηγάζει από την δυνατότητα που μας δίνει να εξασφαλίζουμε ότι η λύση του Βασικού Προβλήματος υπάρχει. Γενικά, μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής (ΙΙΙ.14), μπορεί να έχει καμία, μία ή πολλές λύσεις. Το Θεώρημα 3 δίνει μια ομάδα ικανών συνθηκών για την ύπαρξη μίας και μοναδικής λύσης. της συναρτησιακής εξίσωσης. Στη συνέχεια, όμως με επιπλέον

υποθέσεις, η λύση του Βασικού προβλήματος προκύπτει κατά μοναδικό τρόπο από την ίδια την συναρτησιακή εξίσωση. Αυτό φυσικά προϋποθέτει ότι η συνάρτηση αξίας, V , είναι γνωστή. Δυστυχώς, αυτό δεν είναι εύκολο. Αλλά, μπορούμε να βρούμε την λύση υπολογιστικά ή να επανέλθουμε στη συνθήκη Euler. Η τελευταία μπορεί, επίσης, να προκύψει από την συναρτησιακή εξίσωση του Bellman.

<u>Θεώρημα 4:</u> Επίσης αποδεικνύεται στο Παράρτημα, ότι αν:

(ν) Η $\Phi \in C^1\left[\operatorname{int}(A)\right]$
τότε για κάθε $x \in \operatorname{int} \mathrm{X} \ni h(x) \in \operatorname{int}\left[\Gamma(x)\right]$

η V είναι διαφορίσιμη στο x *και*

$$V'(x) = \Phi_1\left(x, h(x)\right)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος του Περιβλήματος στην (ΙΙΙ.14).

Η Παρατήρηση ΙΙΙ.2 και το Θεώρημα 4 συνεπάγονται την συνθήκη Euler:

<u>Παρατήρηση ΙΙΙ.3:</u> Αν ισχύουν οι συνθήκες (ι)-(ν), και η λύση του Βασικού Προβλήματος , $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, είναι εσωτερική ($x_{t+1}^* \in \operatorname{int}\left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right],\ \forall t \geq 0$), τότε η λύση αυτή χαρακτηρίζεται από την σχέση:

$$\Phi_2\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta\Phi_1\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.34}$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3, κάθε λύση του Βασικού Προβλήματος, $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, προκύπτει από την λύση του προβλήματος (ΙΙΙ.16).Εφόσον η λύση αυτή είναι εσωτερική, και η V είναι διαφορίσιμη, κάθε εσωτερική λύση του προβλήματος (ΙΙΙ.16) πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\Phi_2\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta V'\left(x_{t+1}^*\right) = 0$$

Έπεται όμως από το Θεώρημα 4, ότι:

$$V'\left(x_{t+1}^*\right) = \Phi_1\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έπεται η (Ι.34). Q.E.D.

Στην περίπτωση που η προσωρινή συνάρτηση δεν είναι φραγμένη, το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης του Βασικού Προβλήματος ενδέχεται να μην υπάρχει. Δηλαδή, μπορεί να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Στην περίπτωση αυτή υποκαθιστούμε το μέγιστο με το ελάχιστο άνω όριο ή supremum και υποθέτουμε ότι:

(Α) Το σύνολο $\Gamma(x)$ είναι μη-κενό

(Β) Για όλα τα $x_0 \in \mathrm{X}$ και εφικτά σχέδια $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, ($x_{t+1}^* \in \left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right]$, $\forall t \geq 0$), το όριο του $\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi(x_t, x_{t+1})$, όπως το $T \to \infty$ είναι καλά ορισμένο, έστω και αν είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε το Βασικό Πρόβλημα, ως εξής:

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right)\right]$$

Θεώρημα 5 (Η Συναρτησιακή Εξίσωση του Bellman στην περίπτωση Μη-Φραγμένης Προσωρινής αντικειμενικής συνάρτησης):

Έστω ότι:

(ι) Το σύνολο $\Gamma(x)$ είναι μη-κενό

(ιι)Για όλα τα $x_0 \in \mathrm{X}$ και εφικτά σχέδια $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, ($x_{t+1}^* \in \left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right]$, $\forall t \geq 0$), το όριο του $\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi(x_t, x_{t+1})$, όπως το $T \to \infty$ είναι καλά ορισμένο, έστω και αν είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

(ιιι) Υπάρχει μία συνάρτηση $\tilde{V}_0(\bullet): X \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\tilde{V}_0\left(x\right) \geq \sup_{\substack{y\in\Gamma(x) \\ x\, \in X \text{ δεδομένο}}} \left[\Phi\left(x, y\right) + \beta \tilde{V}_0\left(y\right)\right],$$

$$\lim \beta^T \tilde{V}_0(x_T) \leq 0,$$

$\tilde{V}_0(x_0) \geq \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) \right]$,*για όλα τα* $x_0 \in \mathrm{X}$ *και εφικτά*

σχέδια $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$.

Αν $\tilde{V}(\bullet): X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι το όριο της ακολουθίας των συναρτήσεων $\left\{\tilde{V}_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ *που προκύπτει διαδοχικά από την συναρτησιακή εξίσωση:*

$$\tilde{V}_{j+1}\left(x\right) = \sup_{\substack{y\in\Gamma(x) \\ x\ \in X\ \text{δεδομένο}}} \left[\Phi\left(x, y\right) + \beta \tilde{V}_j\left(y\right)\right], \tag{III.17}$$

ξεκινώντας από την $\tilde{V}_0(\bullet)$, *ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση:*

$$\tilde{V}\left(x\right) = \sup_{\substack{y\in\Gamma(x) \\ x\ \in X\ \text{δεδομένο}}} \left[\Phi\left(x, y\right) + \beta \tilde{V}\left(y\right)\right], \tag{III.18}$$

τότε,

$\tilde{V}\left(x_0\right) = \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) \right]$, *για όλα τα* $x_0 \in \mathrm{X}$ *και εφικτά*

σχέδια $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$.