Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ Ι:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ: Η ΣΥΝΘΗΚΗ EULER

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

13-02-2018

1. Το Βασικό Πρόβλημα των Ντετερμινιστικών Δυναμικών Οικονομικών σε Διακριτό Χρόνο (Το Νεοκλασικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης Cass-Koopmans):

1.1 Προκαταρκτικά:

Τα νοικοκυριά της οικονομίας είναι όμοια μεταξύ τους και ο χρονικός ορίζοντας κάθε νοικοκυριού είναι άπειρος. Ο αριθμός των νοικοκυριών είναι σταθερός και ίσος με n. Τα νοικοκυριά έχουν στην ιδιοκτησία τους παραγωγικούς συντελεστές και τις επιχειρήσεις. Οι επιχειρήσεις είναι όμοιες μεταξύ τους και παράγουν ένα ομοιογενές τελικό προϊόν, που μπορεί να καταναλώνεται ή να αποταμιεύεται και επενδύεται υπό την μορφή φυσικού κεφαλαίου. Κάθε επιχείρηση χρησιμοποιεί ως παραγωγικούς συντελεστές φυσικό κεφάλαιο και εργασία. Ο αριθμός των επιχειρήσεων είναι πεπερασμένος και ίσος με m.Οι αγορές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών είναι τέλεια ανταγωνιστικές.

1.2 Το Αντιπροσωπευτικό Νοικοκυριό

Εφόσον ο χρονικός ορίζοντας των νοικοκυριών είναι άπειρος και τα νοικοκυριά είναι ομοιογενή ως προς τις προτιμήσεις τους και τους οικονομικούς περιορισμούς που αντιμετωπίζουν, η ανάλυση μπορεί να επικεντρωθεί στη συμπεριφορά ενός αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από μια χρονικά διαχωρίσιμη συνάρτηση ευημερίας της μορφής:

$$u\left(c_0, c_1, \ldots\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(c_t\right) \qquad \beta \in \left(0,1\right) \tag{1.1}$$

όπου:

c_t: κατάναλωση του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού την περίοδο

β: συντελεστής διαχρονικής προτίμησης ο οποίος χαρακτηρίζει την υπομονετικότητα του νοικοκυριού.

Για τη συνάρτηση χρησιμότητας $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Είναι C^1 στο $\mathbb{R}_{++}$, ήτοι συνεχώς διαφορίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Με άλλα λόγια, η πρώτη παράγωγος της U , U_{c_t} , υπάρχει και είναι συνεχής.
ii) Είναι αυστηρά αύξουσα ως προς την κατανάλωση, ήτοι $U_{c_t} > 0$
iii) Αυστηρά κοίλη ως προς την κατανάλωση
iv) Συνθήκες Inada: $U_{c_t} \to 0$ καθώς $c_t \to \infty$ και $U_{c_t} \to \infty$ καθώς $c_t \to 0$

Ο εισοδηματικός περιορισμός του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού σε κάθε χρονική περίοδο περιγράφεται από την ανισότητα:

$$c_t + i_t \le r_t k_t + w_t h_t + d_t \,, \forall t \ge 0 \tag{1.2}$$

όπου: i_t είναι η αποταμίευση και επένδυση του νοικοκυριού την περίοδο *t*, r_t , w_t και d_t είναι οι αμοιβές του νοικοκυριού για τις υπηρεσίες κεφαλαίου και εργασίας και τα μερίσματα από τις επιχειρήσεις, αντίστοιχα, την περίοδο *t*. Οι παραπάνω τιμές είναι διαιρεμένες με την τιμή του τελικού προϊόντος της περιόδου *t*. Δηλαδή, r_t , w_t είναι η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου και ο πραγματικός μισθός, αντίστοιχα, σε όρους τελικού προϊόντος.

Το κεφάλαιο ανά νοικοκυριό ακολουθεί το νόμο κίνησης:

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t \ , \delta \in (0,1] \ , \forall t \ge 0 \tag{1.3}$$

όπου k_t είναι το απόθεμα του κεφαλαίου στην αρχή της περιόδου *t* και δ είναι το ποσοστό (φυσικής) απόσβεσης του κεφαλαίου.

Οι υπηρεσίες εργασίας προσφέρονται ανελαστικά και το νοικοκυριό παρέχει μια μονάδα εργασίας σε κάθε περίοδο:

$$h_t = 1, \forall t \ge 0 \tag{1.4}$$

Επιπλέον, οι επιλογές του νοικοκυριού δεσμεύονται από τους φυσικούς περιορισμούς:

$$c_t, k_{t+1} \ge 0 \,, \ \forall t \ge 0 \tag{1.5}$$

και την αρχική συνθήκη:

$k_0 \in \mathbb{R}_+$ *δεδομένο* (1.6)

Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, στην αρχή της περιόδου, $t=0$, επιλέγει ένα σχέδιο κατανάλωσης, επένδυσης, προσφοράς κεφαλαίου και εργασίας ώστε να μεγιστοποιήσει τη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας (1.1) υπό τους περιορισμούς (1.2)-(1.6), θεωρώντας ότι οι τιμές $\{r_t, w_t, d_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι δεδομένες και δεν επηρεάζονται από την συμπεριφορά του. Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού διατυπώνεται, συμβολικά, ως εξής:

$$\max_{\{c_t, i_t, k_t, h_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \quad \beta \in (0,1)$$
(1.7)

υπό τους περιορισμούς:

$c_t + i_t \leq r_t k_t + w_t h_t + d_t, \forall t \geq 0$ (1.2)

$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t, \delta \in (0,1], \forall t \geq 0$ (1.3)

$h_t = 1, \forall t \geq 0$ (1.4)

$c_t, k_{t+1} \geq 0 \qquad \forall t \geq 0$ (1.5)

$k_0 \in \mathbb{R}_+$ *δεδομένο* (1.6)

1.3 Η Αντιπροσωπευτική Επιχείρηση

Οι επιχειρήσεις νοικιάζουν κεφάλαιο, προσλαμβάνουν εργατικό δυναμικό και παράγουν προϊόν σε κάθε χρονική περίοδο, t. Η τεχνολογία στην οποία έχει πρόσβαση κάθε επιχείρηση για την παραγωγή του προϊόντος χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση παραγωγής της μορφής $F(K_t, L_t)$, όπου:

K_t: εισροή κεφαλαίου την περίοδο t

L_t: εισροή εργασίας την περίοδο t

Για τη συνάρτηση παραγωγής $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ υποθέτουμε ότι:

i) Είναι C^1 στο $\mathbb{R}_{++}^2$

ii) Είναι αυστηρά αύξουσα ως προς το κεφάλαιο και την εργασία, ήτοι $F_K > 0, F_L > 0, \ \forall K, L > 0$

iii) Είναι αυστηρά κοίλη ως προς το κεφάλαιο και την εργασία

iv) $F(K,0)=F(0,L)=0$, ήτοι και οι δύο παραγωγικοί συντελεστές είναι απαραίτητοι για την παραγωγή
v) Ικανοποιεί τις συνθήκες *Inada:*
$F_K \to 0$ καθώς $K \to +\infty, F_L \to 0$ καθώς $L \to +\infty$
$F_K \to +\infty$ καθώς $K \to 0, F_L \to +\infty$ καθώς $L \to 0$
vi) Είναι ομογενής πρώτου βαθμού. Δηλαδή, $F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L),\ \forall (K,L)\in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \lambda > 0$, ήτοι η συνάρτηση παραγωγής επιδεικνύει σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση σε κάθε χρονική περίοδο επιλέγει ένα σχέδιο εισροών κεφαλαίου, εργασίας και προσφερόμενου προϊόντος ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Η συνάρτηση (πραγματικών) κερδών της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης, σε κάθε χρονική περίοδο , t, ορίζεται ως εξής:

$$\Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t L_t \tag{1.7}$$

όπου: Y_t είναι το προσφερόμενο προϊόν της επιχείρησης. Στις επιλογές της η αντιπροσωπευτική επιχείρηση δεσμεύεται από τους κάτωθι περιορισμούς:

Τον περιορισμό της τεχνολογίας:

$$Y_t \le F(K_t, L_t) \tag{1.8}$$

και τους φυσικούς περιορισμούς:

$$K_t, L_t, Y_t \ge 0 \tag{1.9}$$

Επίσης, θεωρεί ότι οι τιμές του προϊόντος και των παραγωγικών συντελεστών είναι δεδομένες και δεν επηρεάζονται από την συμπεριφορά της.

Το πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης μπορεί να διατυπωθεί συμβολικά, ως εξής:

$$\max_{Y_t, L_t, K_t} (Y_t - r_t K_t - w_t L_t) \tag{1.10}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$Y_t \leq F\left(K_t, L_t\right) \tag{1.8}$$
$$K_t, L_t, Y_t \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \tag{1.9}$$

1.4 Το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας

Οι επιλογές των n νοικοκυριών και m επιχειρήσεων συντονίζονται μέσω του μηχανισμού της αγοράς, που καθορίζει την ποσότητα και την τιμή του κάθε εμπορεύσιμου αγαθού. Συγκεκριμένα, το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας της οικονομίας ορίζεται σαν μια ακολουθία:

$$\left\{(c_t^*, i_t^*, k_t^*, h_t^*);(Y_t^*, K_t^*, L_t^*);(w_t^*, r_t^*, d_t^*)\right\}_{t=0}^{\infty}$$

τέτοια ώστε:

1. Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, η ακολουθία $\left\{c_t^*, i_t^*, k_t^*, h_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ αποτελεί λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.
2. Δεδομένης της ακολουθίας $\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, η ακολουθία $\left\{Y_t^*, K_t^*, L_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ αποτελεί λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.
3. Δεδομένων των ακολουθιών $\left\{c_t^*, i_t^*, h_t^*, k_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ και $\left\{Y_t^*, K_t^*, L_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ η ακολουθία$\left\{w_t^*, r_t^*, d_t^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ εκκαθαρίζει τις αγορές, υπό την έννοια ότι εξισώνει την προσφορά με την αντίστοιχη ζήτηση σε κάθε χρονική περίοδο *t*:

Αγορά Τελικού Προϊόντος: $mY_t = n\left(c_t + i_t\right)$ (1.11)

Αγορά Υπηρεσιών Κεφαλαίου: $mY_t = n\left(c_t + i_t\right)$ …..(1.12)

Αγορά Εργασίας: $mL_t = nh_t = n$ (1.13)

Πρόταση 1: Το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας χαρακτηρίζεται από την λύση του προβλήματος:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(f\left(k_t\right)+\left(1-\delta\right)k_t-k_{t+1}\right) \qquad (1.14)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$0 \le k_{t+1} \le f\left(k_t\right)+\left(1-\delta\right)k_t \qquad (1.15)$$

$$k_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \textit{δεδομένο} \qquad (1.16)$$

όπου:

$$f\left(k_t\right) \equiv F\left(k_t, 1\right) \qquad (1.17)$$

$$r_t = f'\left(k_t\right) \qquad (1.18)$$

$$w_t = f\left(k_t\right) - f'\left(k_t\right)k_t \qquad (1.19)$$

$$d_t = 0 \qquad (1.20)$$

Απόδειξη:
Λόγω της μορφής της αντικειμενικής συνάρτησης της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης και συγκεκριμένα, καθώς η συνάρτηση αυτή είναι αυστηρά αύξουσα στο Y_t, κάθε λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης πρέπει να ικανοποιεί την (1.8) με ισότητα. Άρα, το πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\max_{L_t, K_t \ge 0} [F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t]$$

Οι αναγκαίες συνθήκες για τη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι:

$$F_K\left(K_t, L_t\right) \le r_t \; [F_K\left(K_t, L_t\right) < r_t \textit{ iff } K_t = 0]$$
$$F_L\left(K_t, L_t\right) \le w_t \; [F_L\left(K_t, L_t\right) < w_t \textit{ iff } L_t = 0]$$

Όμως, οι συνθήκες Inada εξασφαλίζουν ότι μια εισροή δεν μπορεί να είναι μηδέν, γιατί τότε το οριακό της προϊόν είναι $+\infty$ και δεν είναι δυνατόν να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες για οιαδήποτε τιμή. Άρα, σε κάθε σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας πρέπει να ισχύει ότι:

$$F_K(K_t, L_t) = r_t \tag{1.21}$$

$$F_L(K_t, L_t) = w_t \tag{1.22}$$

Δηλαδή, κάθε παραγωγικός συντελεστής αμείβεται με το οριακό του προϊόν. Τώρα, η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας, δεδομένης της διαφορησιμότητας της συνάρτησης παραγωγής F συνεπάγεται :

$F(K_t, L_t) = F_K(K_t, L_t)K_t + F_L(K_t, L_t)L_t$ (Θεώρημα του Euler)

Και, λαμβανομένου υπόψη των (1.21) και (1.22), έχουμε:

$$r_t K_t + w_t L_t = F(K, L)$$

Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες ισορροπίας των αγορών, (1.11) -(1.13) και την (1.4):

$$r_t\left(\frac{n}{m}\right)k_t + w_t\left(\frac{n}{m}\right)h_t = \frac{n}{m}F(k_t, h_t) => r_t k_t + w_t h_t = F(k_t, h_t) = F(k_t, 1) = f(k_t) \tag{1.23}$$

Η τελευταία ισότητα στην (1.23) είναι η (1.17). Επίσης, έπεται από την παραπάνω σχέση, ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις (1.18)-(1.20).

Τώρα, δεδομένου ότι η συνάρτηση παραγωγής F είναι αυστηρά κοίλη, οι συνθήκες (1.21), (1.22) είναι και ικανές για την λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης. Άρα, δεδομένου του περιορισμού (1.4), η λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης και οι συνθήκες ισορροπίας των αγορών εξασφαλίζονται, τότε και μόνο τότε που ισχύουν οι συνθήκες (1.17)-(1.20). Για να αποδείξουμε την Πρόταση 1, παραμένει να δείξουμε ότι η λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, είναι η ίδια με την λύση του προβλήματος (1.14)-(1.16), δεδομένου των συνθηκών (1.17)-(1.20).

Λόγω της υπόθεσης ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αυστηρά αύξουσα, ο περιορισμός (1.2) θα ικανοποιείται μόνο με ισότητα στην όποια λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

Αυτό σημαίνει ότι στην λύση του προβλήματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού., ισχύει ότι:

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t h_t + d_t \tag{1.24}$$

Συνδυάζοντας την (1.24) με τον νόμο κίνησης του κεφαλαίου, (1.3), προκύπτει ότι:

$$c_t + k_{t+1} = r_t k_t + w_t h_t + (1-\delta) k_t \tag{1.25}$$

Αλλά, από τις συνθήκες (1.17) και (1.20), μπορούμε να απαλλαχτούμε από τους όρους w_t, r_t και d_t, οπότε ο περιορισμός του νοικοκυριού (1.25), διατυπώνεται ως:

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta) k_t \tag{1.26}$$

Η σχέση (1.34) και εφόσον αντικαταστήσουμε ως προς c_t στην συνάρτηση χρησιμότητας, μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα του νοικοκυριού ως πρόβλημα (1.14)-(1.16). Ο περιορισμός (1.16) είναι ο ίδιος με τον (1. 6) και ο περιορισμός (1.15) είναι ο ;ίδιος με τον περιορισμό (1.5), δεδομένου της (1.26). Q.E.D.

Η Πρόταση 1 είναι σημαντική για πολλούς λόγους. Πρώτον (Οικονομική Θεωρία), το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας προκύπτει από την λύση του προβλήματος ενός «κοινωνικού σχεδιαστή», που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού υπό τον περιορισμό των διαθέσιμων οικονομικών πόρων και της τεχνολογίας. Αυτό είναι μία συνέπεια του Πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος των Οικονομικών της Ευημερίας. Δηλαδή, κάθε σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας είναι βέλτιστο κατά Pareto. Δεύτερον (Πρακτικό Όφελος στον Υπολογισμό), ………………….: Τρίτον (Μαθηματική Μεθοδολογία),το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή είναι της μορφής:

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \quad \forall\, t \geq 0$$

$x_0 \in \mathrm{X}$ *δεδομένο*

όπου $x_t = k_t$, $F\left(x_t, x_{t+1}\right) = U\left(f\left(k_t\right) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right)$
και $\Gamma\left(x_t\right): 0 \le k_{t+1} \le f\left(k_t\right) + (1-\delta)k_t$