Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ IV:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ:
ΑΝΑΛΥΣΗ ΟΛΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

02-03-2018

1. Ποιοτική έναντι Ποσοτικής Ανάλυσης

Είναι προφανές από τις ΣΠ Ι και ΣΠ ΙΙ, ότι εφόσον , η

$$u[(1-\delta)k_t + f(k_t) - k_{t+1}]$$

είναι συνεχώς διαφορίσιμη, και αυστηρά κοίλη ως προς το $(k_t, k_{t+1}) \in \mathbb{R}_+^2$ και αυστηρά αύξουσα ως προς το k_t, ότι:

(α)Η συνθήκη Euler:

$$u'(\mathrm{c}_t) = \beta u'(\mathrm{c}_{t+1})[(1-\delta) + f'\,(k_{t+1})] \qquad \text{(IV. 1)}$$

είναι αναγκαία συνθήκη για την εσωτερική λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, (Ι.14)-(Ι.16).

(β) Η συνθήκη Euler (IV.1) μαζί με την αρχική συνθήκη:

$k_0 \in \mathbb{R}_+$ δεδομένο (IV.2)

και την Τερματική συνθήκη:

$$\beta^T u'(\mathrm{c}_T) k_{T+1} \to 0 \quad \acute{o}\pi\omega\varsigma \quad T \to \infty \qquad \text{(IV.3)}$$

είναι μια ομάδα ικανών συνθηκών για την μοναδική λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, (Ι.14)-(Ι.16).

Η αναλυτική λύση της ομάδας των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για την εσωτερική λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή δεν είναι, γενικά, δυνατή. Αυτό προκύπτει από το γεγονός, ότι έστω και με τις απλούστερες αναλυτικές μορφές για τις προτιμήσεις, την τεχνολογία και τον κανόνα μετάβασης του φυσικού κεφαλαίου, η συνθήκη Euler (IV.1) είναι μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Ισχύει δε, ότι οι εξισώσεις αυτές δεν έχουν αναλυτική λύση, πλην ορισμένων ειδικών περιπτώσεων όπως αυτές της Άσκησης 1.5

Για παράδειγμα, θεωρήστε την περίπτωση της Άσκησης 1.5.α, όπου: (α) οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από την προσωρινή συνάρτηση χρησιμότητας «σταθερής σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο», $u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}; \quad \gamma\in(0,\infty)$; (β) η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής Cobb-Douglas, $F(K\ ,L\ )=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}; \quad A\in(0,\infty),\ \ \alpha\in(0,1)$; and (γ) ο κανόνας μετάβασης του κεφαλαίου χαρακτηρίζεται από σταθερό γεωμετρικό ρυθμό απόσβεσης, $\delta\in(0,1]$. Στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη Euler και η Τερματική συνθήκη διαμορφώνονται ως εξής:

$$\left[\frac{(1-\delta)k_{t+1}+Ak_{t+1}{}^{\alpha}-k_{t+2}}{(1-\delta)k_{t}+Ak_{t+1}{}^{\alpha}-k_{t+1}}\right]^{\gamma}=\beta[(1-\delta)+\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}\ ] \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\beta^{T}\,\mathrm{c}_{T}{}^{-\gamma}k_{T+1}\rightarrow 0 \quad as \quad T\rightarrow\infty \qquad \text{την} \qquad \text{(IV.5)}$$

Η εξίσωση (IV.4) δεν έχει αναλυτική λύση. Δηλαδή, η λύση της

$$k_{t+1}=\kappa(k_{t}) \qquad \text{(IV.6)}$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες (IV.2) και (IV.5), δεν μπορεί να εκφρασθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η συνάρτηση $\kappa:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ να έχει αναλυτική μορφή. Για το λόγο αυτό, η οικονομική ανάλυση ακολουθεί δύο διαφορετικές μεθόδους χαρακτηρισμού της λύσης (IV.6): Πρώτον, μελετά τις ποιοτικές ιδιότητες της λύσης (IV.6) («ποιοτική ανάλυση») δεύτερον, η λύση της (IV.6) προσεγγίζεται αριθμητικά («ποσοτική ανάλυση»).

2. Ανάλυση Ολικής Ευστάθειας

Ο ποιοτικός χαρακτηρισμός της λύσης (IV.6) γίνεται, επίσης, με δύο διαφορετικές μεθόδους, που είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους: Την ανάλυση ολικής ευστάθειας (global- stability analysis) και την ανάλυση τοπικής ευστάθειας (local stability analysis). Στην διάλεξη αυτή παρουσιάζουμε την πρώτη μέθοδο.

Όπως είδαμε στην Άσκηση Ι.3.β, το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά με την κατανάλωση, c_t, να είναι μεταβλητή κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή, αντί για την μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού (IV.4), μπορούμε να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ισοδύναμο σύστημα των δύο μη –γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + Ak_t^{\alpha} - c_t \tag{IV.7}$$

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta[(1-\delta) + \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}] \tag{IV.8}$$

Κατ’ αρχάς ενδιαφερόμαστε για το εάν η λύση του συστήματος (IV.7)-(IV.8) έχει σταθερή ισορροπία ή σταθερό σημείο. Δηλαδή, αν υπάρχει μια κατάσταση όπου οι δύο μεταβλητές που χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος (state variables) την περίοδο t, c_{t-1} και k_t δεν μεταβάλλονται:

$$\ldots = c_{t-1} = c_t = c_{t+1} = \ldots.$$

$$\ldots = k_{t-1} = k_t = k_{t+1} = \ldots.$$

Συνεπάγεται από τις (IV.7)-(IV.8) , ότι κάθε τέτοια σταθερή ισορροπία, (c, k) πρέπει να είναι λύση του συστήματος:

$$c = Ak^{\alpha} - \delta k \equiv g(k) \tag{IV.9}$$

$$k = \left[\frac{\alpha\beta A}{1-\beta(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv h(k) \tag{IV.10}$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση $g(k)$ χαρακτηρίζει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (k, c), όπου : $\ldots = k_{t-1} = k_t = k_{t+1} = \ldots.$ και η συνάρτηση $h(k)$ χαρακτηρίζει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (k, c), όπου . $.. = c_{t-1} = c_t = c_{t+1} = \ldots..$ Επίσης, έπεται από τις ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγικότητας Ak_t^{α}, ότι:

(α) η συνάρτηση $g(k): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

(β) η συνάρτηση $g(k)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}_{++}$,

(γ) η συνάρτηση $g(k)$ είναι αυστηρά κοίλη

(γ) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(k)$ έχει σχήμα αντεστραμμένου U,

(δ) $g(0) = g(\bar{k}) = 0$, όπου $\bar{k} = \left(\dfrac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

(ε) $g(k^{gold}) = \max_{k \geq 0} \; g(k) \equiv c^{gold}$, όπου $k^{gold} = \left(\dfrac{\alpha A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Το σημείο $\bar{k}$ είναι το μέγιστη τιμή του κεφαλαίου που μπορεί να υπάρξει στη σταθερή ισορροπία και c^{gold} είναι η μέγιστη τιμή της κατανάλωσης, που μπορεί να υπάρξει στην σταθερή ισορροπία, που ονομάζεται ¨χρυσούς κανόνας» (“golden rule”) .

Η $h(k \;)$ είναι μία σταθερή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι μία κάθετη ευθεία στον οριζόντιο άξονα

Προφανώς, η τομή των δύο γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(k)$ και $h(k \;)$ αντιστοιχεί σε σταθερή ισορροπία. Ως εκ τούτου, εκτός του σημείου (0,0), υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο για το κεφάλαιο και την κατανάλωση, (k^*, c^*) Επίσης, προφανώς:

$$k^* = \left(\frac{\alpha \beta A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{IV.11}$$

$$c^* = A(k^*)^{\alpha} - \delta k^* \tag{IV.12}$$

Έπεται ότι: $0 < k^* < k^{gold} < \bar{k}$ and $0 < c^* < c^{gold}$. Το γεγονός ότι το σημείο (0,0) είναι σταθερό σημείο έπεται από την (IV.9) και από την γωνιακή μορφή της συνθήκης Euler (Βλέπε …..), η οποία συνεπάγεται ότι στην περίπτωση αυτή η (IV.10) έχει την μορφή, $0 < h(k \;)$, που προφανώς και ισχύει. Στην Άσκηση Ι.4 είδαμε ότι αν θεωρήσουμε ότι $k_0 > 0$, μπορούμε να αγνοήσουμε την περίπτωση όπου η λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή δεν είναι εσωτερική. Στην συνέχεια θα αγνοήσουμε την μη ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $k_0 = 0$.

Οι γεωμετρικοί τόποι $g(k\ )$ and $h(k\ )$ καθώς και η τομή τους απεικονίζονται στο Διάγραμμα IV.1.

Το διάγραμμα αυτό είναι ένα «διάγραμμα φάσης». Τα διαγράμματα φάσης μπορούν να απεικονίσουν την λύση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων ποιοτικά. Αυτό γίνεται γιατί μπορούμε με την μελέτη των εξισώσεων του συστήματος να χαρακτηρίσουμε την κίνηση των μεταβλητών κατάστασης σε σχέση με τις σταθερές ισορροπίες, ξεκινώντας από διαφορετικές αρχικές συνθήκες των μεταβλητών κατάστασης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, παρατηρούμε τα εξής:

Πρώτο, μπορούμε να μελετήσουμε την πορεία των μεταβλητών κατάστασης σε σχέση με την σταθερή ισορροπία, χρησιμοποιώντας τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων σταθερής ισορροπίας. Συνδυάζοντας τις (IV.7)-(IV.10), έχουμε:

$$(k_{t+1}-k_t)=g(k_t)-c_t \qquad \text{(IV.13)}$$

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}-1=[1-\beta(1-\delta)]\left\{\left[\frac{h(k_{t+1})}{k_{t+1}}\right]^{1-\alpha}-1\right\} \qquad \text{(IV.14)}$$

Δεύτερο, παρατηρούμε από την (IV.13) ότι για όποιο δεδομένο επίπεδο της κατανάλωσης, c_t, πάνω από τον γεωμετρικό τόπο $g\ (k)$, το κεφάλαιο μειώνεται στην επόμενη περίοδο, $(k_{t+1}-k_t)$<0. Και, για όποιο δεδομένο επίπεδο της κατανάλωσης, c_t, κάτω από τον γεωμετρικό τόπο $g\ (k)$, το κεφάλαιο αυξάνεται στην επόμενη περίοδο, $(k_{t+1}-k_t)$>0. Παρόμοια, από την (IV.14) , παρατηρούμε ότι για όποιο δεδομένο επίπεδο του κεφαλαίου, k_{t+1}, πάνω από τον γεωμετρικό τόπο $h\ (k)$, η κατανάλωση μειώνεται στην επόμενη περίοδο, $\frac{c_{t+1}}{c_t}$<1. Και, για όποιο δεδομένο επίπεδο του κεφαλαίου, k_{t+1}, κάτω από τον γεωμετρικό τόπο $h\ (k)$, η κατανάλωση αυξάνεται στην επόμενη περίοδο, $\frac{c_{t+1}}{c_t}$>1. Τα βέλη στο Διάγραμμα IV.1 χαρακτηρίζουν τις κινήσεις των μεταβλητών κατάστασης, σύμφωνα με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (IV.7) –(IV.8). Διακρίνουμε τέσσερις ΄περιοχές με διαφορετικές πορείες για τις μεταβλητές κατάστασης, που συμβολίζονται με τα γράμματα A,B,C, D στο διάγραμμα. Γίνεται προφανές, λοιπόν, ότι η πορεία των μεταβλητών κατάστασης εξαρτάται από τις αρχικές τιμές τους. Δηλαδή, σε ποια από αυτές τις περιοχές ευρίσκονται οι αρχικές τιμές τους.

Αν οι αρχικές τιμές είναι στην περιοχή A, τότε το σύστημα κινηθεί βορειοανατολικά με το κεφάλαιο και την κατανάλωση να αυξάνουν διαρκώς , όσο το σύστημα παραμένει στην περιοχή A. Αν οι αρχικές τιμές είναι στην περιοχή C, τότε το σύστημα θα κινηθεί νοτιοδυτικά με το κεφάλαιο και την κατανάλωση να μειώνονται διαρκώς, όσο το σύστημα παραμένει στην περιοχή C. Αν οι αρχικές τιμές είναι στην περιοχή B, τότε η πορεία του συστήματος είναι νοτιοανατολικά με την κατανάλωση να μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί, σε πεπερασμένο χρόνο και το κεφάλαιο να αυξάνεται συνεχώς μέχρι το μέγιστο δυνατό σημείο $\overline{k}$. Τέλος, αν οι αρχικές τιμές είναι στην περιοχή D, τότε η πορεία του συστήματος είναι βορειοδυτικά με το κεφάλαιο να μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί σε πεπερασμένο χρόνο και την κατανάλωση να αυξάνεται διαρκώς μέχρι το σημείο που αντιστοιχεί στο μηδενικό κεφάλαιο. Προφανώς, η πορεία του συστήματος θα είναι να συγκλίνει προς την σταθερή ισορροπία αν ξεκινήσει από την περιοχή A (C) και παραμείνει στην περιοχή A (C). Οι πορείες προς την σταθερή ισορροπία ονομάζονται ευσταθή μονοπάτια (stable paths ή stable manifolds).

Τρίτο, μας ενδιαφέρει, φυσικά, αν η πορεία της λύσης του συστήματος (IV.7)-(IV.8) υπό τον περιορισμό (IV.3) ακολουθεί ευσταθή μονοπάτια, άσχετα με την τιμή του $k_0 > 0$.Στην περίπτωση αυτή αποκαλούμε την σταθερή ισορροπία (k^*, c^*), ολικά (ασυμπτωτικά) ευσταθή σταθερή ισορροπία (globally asymptotically stable steady state).

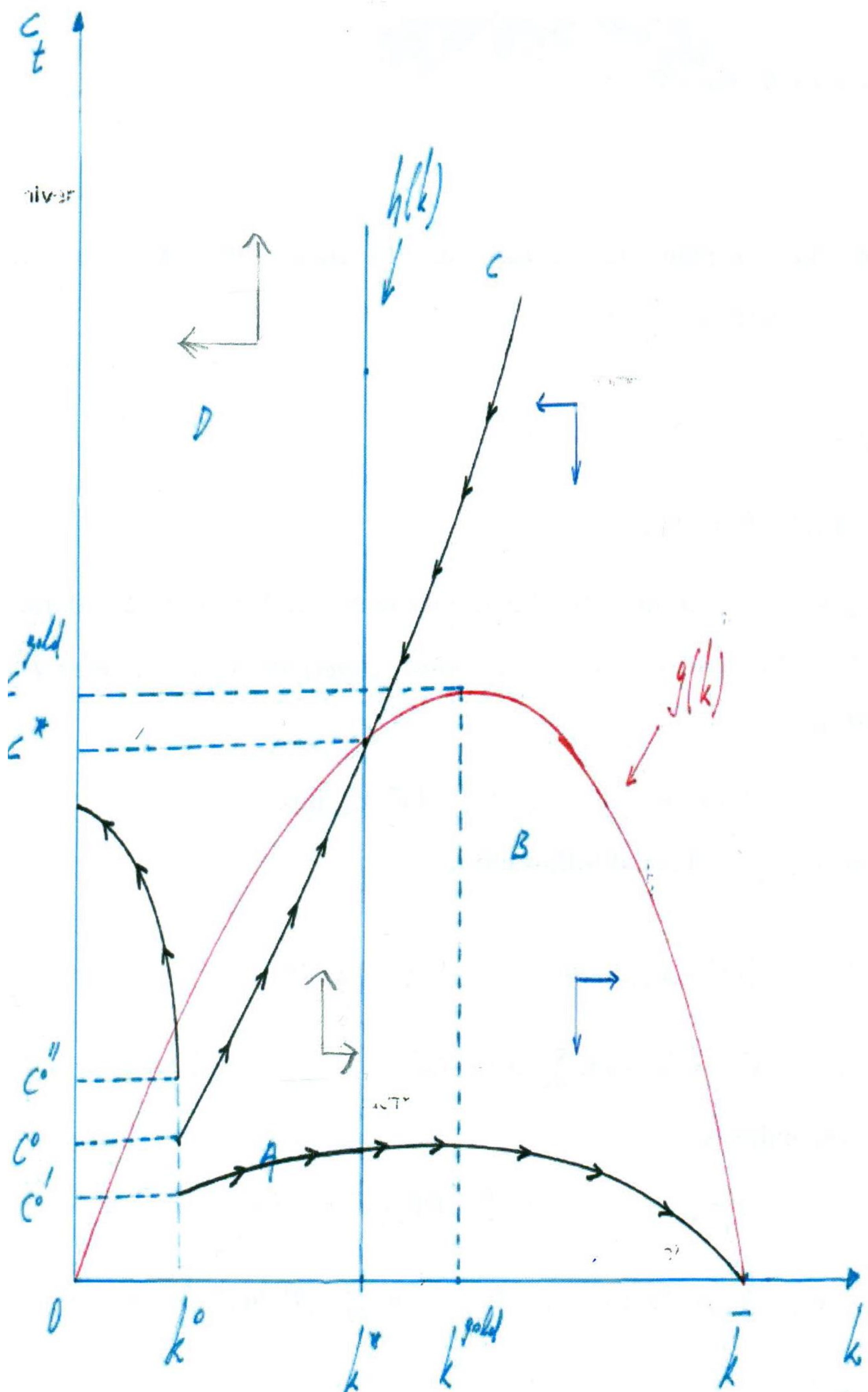

Figure 1: Phase Diagram in the Neoclassical Growth Model

Τέταρτο, εκλαμβάνοντας την κατανάλωση σαν μεταβλητή κατάστασης, η οποία δεν συνοδεύεται με αρχική συνθήκη που θα καθόριζε το c_0., σημαίνει ότι η κατανάλωση την περίοδο 0 πρέπει να πάρει την τιμή που ικανοποιεί την τερματική συνθήκη (IV.3). Στην ορολογία των δυναμικών συστημάτων, η κατανάλωση την περίοδο 0 είναι «μεταβλητή άλματος» ("jump variable"). Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δούμε την πορεία του συστήματος για όλους τους συνδυασμούς αρχικού κεφαλαίου και δυνατών τιμών αρχικής κατανάλωσης και να επιλέξουμε για c_0, την τιμή που ικανοποιεί την τερματική συνθήκη. Καθώς, όμως για κάθε αρχική κατάσταση, το μονοπάτι που ακολουθεί η μεταβλητή κατάστασης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού είναι ένα και μοναδικό, έπεται ότι και η τιμή c_0 είναι μοναδική για κάθε πορεία.[1]

Πέμπτο, για να δούμε τι συμβαίνει στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, ας υποθέσουμε ότι το αρχικό κεφάλαιο k_0 είναι αριστερά από το k^*. Αν η κατανάλωση c_0 κάνει άλμα στο ευσταθές μονοπάτι, στην περιοχή Α, τότε το σύστημα παραμένει στην περιοχή Α και συγκλίνει ασυμπτωτικά στην σταθερή ισορροπία. Η τερματική συνθήκη προφανώς και ικανοποιείται γιατί τότε $c_T < c^* < \infty$ και $k_{T+1} < k^* < \infty$, όπως $T \to \infty$.

Για να αποδείξουμε ότι αυτή είναι η μόνη δυνατή εκδοχή, υποθέτουμε, αντίθετα, ότι η κατανάλωση κάνει άλμα στο σημείο $c_0' < c_0$. Ακολουθώντας τα βέλη που δείχνουν την πορεία του συστήματος στο Διάγραμμα IV.1, το σύστημα θα κινηθεί βορειανατολικά μέχρι να εισέλθει

[1] Αυτό είναι απόρροια της ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης των διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού με δεδομένη αρχική συνθήκη. Δηλαδή, αν ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από την σχέση $\chi_{\tau+1} = \varphi(\chi_\tau)$, όπου $\tau \in \mathbb{N}_+$, $\chi_\tau : \mathbb{N}_+ \to \mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, $\varphi \in C^1(IntX)$ και $\chi_0 = \bar{\chi} \in \mathrm{X}$ δεδομένο, τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $\psi(\bar{\chi}, \bullet) : \mathbb{N}_+ \to \mathrm{X} \ni \psi(\bar{\chi}, \tau+1) = \varphi[\psi(\bar{\chi}, \tau)]$, με $\psi(\bar{\chi}, 0) = \bar{\chi}$. Για την απόδειξη, βλέπε……

στην περιοχή B και ακολούθως θα κινηθεί νοτιοανατολικά προς το σημείο μηδενικής κατανάλωσης και μέγιστου διατηρήσιμου κεφαλαίου , $\bar{k}$., πεπερασμένο χρόνο. Τούτο όμως θα σήμαινε την παραβίαση της Τερματικής συνθήκης (IV.3). Παρόμοια, αν υποθέσουμε ότι η κατανάλωση κάνει άλμα στο $c_0'' > c_0$, το σύστημα θα κινηθεί βορειοανατολικά μέχρι να εισέλθει στην περιοχή D και ακολούθως θα κινηθεί βορειοδυτικά προς το σημείο μηδενικού κεφαλαίου και θετικής κατανάλωσης, σε πεπερασμένο χρόνο. Όπερ άτοπο γιατί τότε δεν θα ίσχυε η συνθήκη Euler. Παρόμοια, αν το k_0 ήταν δεξιά από το f k^*, θα υπάρχει ένα μοναδικό ευσταθές μονοπάτι που θα οδηγεί ασυμπτωτικά το σύστημα στην σταθερή ισορροπία .(k^*, c^*) Αν αυτό δεν ίσχυε τότε είτε η συνθήκη Euler η ή Τερματική συνθήκη θα είχαν παραβιαστεί.

Τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν σε μία από τις σημαντικότερες προτάσεις της οικονομικής θεωρίας.

<u>Πρόταση 2 (Το Νεοκλασικό Υπόδειγμα Οικονομικής Μεγέθυνσης):</u> Η οικονομία του νεοκλασικού υποδείγματος οικονομικής μεγέθυνσης που παρουσιάστηκε στην Άσκηση I.4.α, έχει ένα μοναδικό σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας, που χαρακτηρίζεται από έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Η πορεία του κεφαλαίου και της κατανάλωσης ανά νοικοκυριό $\{k_{t+1}, c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ χαρακτηρίζεται από το σύστημα (IV 7)-(IV(8), υπό τον περιορισμό της αρχικής συνθήκης (IV.2) συνθήκης και της τερματικής συνθήκης (IV.3)

(2) Η λύση του συστήματος (IV 7)-(IV.8), υπό τον περιορισμό της αρχικής συνθήκης (IV.2) συνθήκης και της τερματικής συνθήκης (IV.3), $\{k_{t+1}, c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, χαρακτηρίζεται από μία μοναδική εσωτερική σταθερή ισορροπία (k^*, c^*), η οποία χαρακτηρίζεται από το σύστημα (IV.9) – (IV.10), και είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

(3) Η δε πορεία που ακολουθεί η λύση $\{k_{t+1}, c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ είναι τέτοια ώστε :

Εάν $k_0 < k^*$, $\{k_{t+1}, c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ αυξάνει μονοτονικά όπως συγκλίνει ασυμπωτικά προς την σταθερή πορεία (k^*, c^*) . Και, εάν $k_0 > k^*$, $\{k_{t+1}, c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ μειώνεται μονοτονικά όπως συγκλίνει συμποτικά προς την σταθερή πορεία (k^*, c^*)

Άσκηση IV.1 (Βασικά Χαρακτηριστικά του Kaldor).: Μια οικονομία χαρακτηρίζεται από το υπόδειγμα ….. με τις εξής διαφορές:

(i) Ο πληθυσμός των νοικοκυριών αυξάνει διαρκώς με σταθερό ρυθμό, g_n :

$$n_{t+1} = (1+g_n)\, n_t ; n_0 \text{ δεδομένο} \qquad \text{(IV.15)}$$

όπου n_t . είναι ο αριθμός των νοικοκυριών στην αρχή της περιόδου t.που

(ii) Η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής:

$$F(K_t, z_t L_t) = AK^{\alpha}(z_t L)^{1-\alpha}; \quad A \in (0,\infty),\ \alpha \in (0,1) \qquad \text{(IV.16)}$$

όπου z_t είναι παράμετρος που χαρακτηρίζει το επίπεδο της τεχνολογικής αποτελεσματικότητας. Η μορφή της τεχνολογικής προόδου στην (IV.16), ονομάζεται ουδέτερη κατά Harrod (Harrod neutral) ή μεγεθυντική της εργασίας (labor augmenting).

(iii) Το επίπεδο της τεχνολογικής αποτελεσματικότητας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, g_z :

$$z_{t+1} = (1+g_g)\, z_t ; z_0 \text{ δεδομένο} \qquad \text{(IV.17)}$$

(ι) Δείξτε ότι στο σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας της οικονομίας αυτής, το κεφάλαιο και η κατανάλωση ανά «αποτελεσματικό» νοικοκυριό:

$$\tilde{k}_t = \frac{mK_t}{n_t z_t}$$

$$\tilde{c}_t = \frac{mC_t}{n_t z_t}$$

όπου mC_t είναι η συνολική κατανάλωση της οικονομίας.

συμπεριφέρονται όπως στην Πρόταση 2

(ιι) Δείξτε ότι η σταθερή ισορροπία της οικονομίας αυτής ικανοποιεί τα Βασικά Χαρακτηριστικά του Kaldor. Δηλαδή, το κεφάλαιο και το προϊόν ανά νοικοκυριό αυξάνουν διαρκώς, ο λόγος κεφαλαίου – προϊόντος παραμένει σταθερός, η απόδοση του κεφαλαίου ανά νοικοκυριό παραμένει σταθερή, τα εισοδηματικά μερίδια του κεφαλαίου και της εργασίας παραμένουν σταθερά.

Άσκηση IV.2: Έστω ότι οι οικονομίες δύο χωρών, Α και Β, είναι ακριβώς ίδιες μεταξύ τους και χαρακτηρίζονται από το υπόδειγμα της Άσκησης IV. Αλλά, το κεφάλαιο ανά νοικοκυριό της χώρας Α, k_0^{A}, είναι λιγότερο από αυτό της χώρας Β, k_0^{B}. Ποια από τις δύο θα έχει ταχύτερη οικονομική ανάπτυξη στο μέλλον; Ποια θα έχει ταχύτερη οικονομική ανάπτυξη στην σταθερή ισορροπία;