Προκαταρτικό και Ημιτελές

ΘΕΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ ΙΙ:

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ ΙΙ: Η ΤΕΡΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Τρύφων Κολλίντζας

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

02-03-2018Στην

Στην προηγούμενη διάλεξη παρουσιάστηκε το βασικό ντετερμινιστικό δυναμικό πρόβλημα σε διακριτό χρόνο((Ι.27)-(Ι.29)) και εξήχθησαν οι αναγκαίες συνθήκες για λύση του προβλήματος αυτού. Στην παρούσα διάλεξη εξάγουμε τις ικανές συνθήκες για την λύση του βασικού ντετερμινιστικού δυναμικού προβλήματος.

Θεώρημα 2 (Ικανές Συνθήκες): *Δεδομένων ότι:* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $\Phi \in C^1\left[\operatorname{int}(A)\right]$ *είναι κοίλη, αν* $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ *τέτοιο ώστε,* $x^* = x_0$, $x_{t+1}^* \in \operatorname{int}\left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right]$ *και*

$$\Phi_2\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta\Phi_1\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right) = 0, \forall t \geq 0 \qquad \text{(II.1}$$

και για κάθε εφικτό σχέδιο $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ *ισχύει η σχέση:*

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \beta^{\mathrm{T}}\Phi_1\left(x_{\mathrm{T}}^*, x_{\mathrm{T}+1}^*\right)\left(x_{\mathrm{T}} - x_{\mathrm{T}}^*\right) \geq 0 \qquad \text{(II.2)}$$

τότε το σχέδιο $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ *είναι λύση του Βασικού Προβλήματος (Ι.27)-(Ι.29).*

Δηλαδή, αν η Φ είναι διαφορίσιμη και κοίλη, η συνθήκη Euler (ΙΙ.1), η Αρχική συνθήκη (Ι.27) και η συνθήκη (ΙΙ.2) είναι ικανές για εσωτερική λύση του Βασικού Προβλήματος (Ι.27)-(Ι.29). Ή αν βρεθεί κάποιο εφικτό σχέδιο, $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, *τέτοιο ώστε* $x_{t+1}^* \in \operatorname{int}\left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right]$, $\forall t \geq 0$,που ικανοποιεί την συνθήκη Euler, την Αρχική συνθήκη και την συνθήκη (ΙΙ.2), το σχέδιο αυτό είναι λύση του Βασικού Προβλήματος.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέστε ότι το $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ είναι ένα οποιοδήποτε εφικτό σχέδιο και ορίστε Δ ως τη διαφορά μεταξύ της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στην (Ι.27) στο σχέδιο $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ και της τιμής της στο τυχαίο εφικτό σχέδιο $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$:

$$\Delta = \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^t \Phi\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) - \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^t \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right)$$

$$= \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^t \left[\Phi\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) - \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right)\right]$$

Τότε το μονοπάτι $\left\{x_{t+1}^{*}\right\}_{t=0}^{\infty}$ θα είναι λύση στο Βασικό Πρόβλημα (I.27)-(I.29) τότε και μόνο τότε, που $\Delta \geq 0$ για κάθε τυχαίο εφικτό σχέδιο $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ Παρατηρούμε ότι, εφόσον η $\Phi \in C^{1}\left[\operatorname{int}(A)\right]$ είναι κοίλη, ισχύει ότι:

$$\Phi\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right) \geq \Phi\left(x_{t}, x_{t+1}\right)+\Phi_{1}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t}^{*}-x_{t}\right)+\Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t+1}^{*}-x_{t+1}\right)$$

για κάθε $\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right),\left(x_{t}, x_{t+1}\right) \in \mathrm{A}$. Τότε, έπεται ότι:

$$\Delta=\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t}\left[\Phi_{1}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t}^{*}-x_{t+1}\right)+\Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t+1}^{*}-x_{t}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t}\left[\Phi_{1}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t}^{*}-x_{t}\right)\right]+\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t}\left[\Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t+1}^{*}-x_{t+1}\right)\right]=$$

(και αναλύοντας τα απειραθροίσματα........)

$$=\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{s=-1}^{\mathrm{T}-1} \beta^{s+1} \Phi_{1}\left(x_{s+1}^{*}, x_{s+2}^{*}\right)\left(x_{s+1}^{*}-x_{s+1}\right)+\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t} \Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t+1}^{*}-x_{t+1}\right)=$$

$$\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty}\left[\Phi_{1}\left(x_{0}^{*}, x_{1}^{*}\right)\left(x_{0}^{*}-x_{0}\right)+\sum_{s=0}^{\mathrm{T}} \beta^{s+1} \Phi_{1}\left(x_{s+1}^{*}, x_{s+2}^{*}\right)\left(x_{s+1}^{*}-x_{s+1}\right)-\beta^{\mathrm{T}+1} \Phi_{1}\left(x_{\mathrm{T}+1}^{*}, x_{\mathrm{T}+2}^{*}\right)\left(x_{\mathrm{T}+1}^{*}-x_{\mathrm{T}+1}\right)\right]+$$

$$+\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t}\left[\Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\left(x_{t+1}^{*}-x_{t+1}\right)\right]=$$

$$\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty}\left\{\sum_{t=0}^{\mathrm{T}} \beta^{t}\left[\beta \Phi_{1}\left(x_{t+1}^{*}, x_{t+2}^{*}\right)+\Phi_{2}\left(x_{t}^{*}, x_{t+1}^{*}\right)\right]\left(x_{t+1}^{*}-x_{t+1}\right)+\Phi_{1}\left(x_{0}^{*}, x_{1}^{*}\right)\left(x_{0}^{*}-x_{0}\right)\right\}+$$

$$\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \beta^{\mathrm{T}+1} \Phi_{1}\left(x_{\mathrm{T}+1}^{*}, x_{\mathrm{T}+2}^{*}\right)\left(x_{\mathrm{T}+1}-x_{\mathrm{T}+1}^{*}\right)$$

Από τη συνθήκη Euler (I.34) και την αρχική συνθήκη (I.29) έπεται ότι οι δύο πρώτοι όροι από τους τρεις όρους στο δεξί μέρος της τελευταίας ισότητας μηδενίζονται. Κατά συνέπεια, έπεται ότι:

$$\Delta \geq \lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \beta^{\mathrm{T}} \Phi_{1}\left(x_{\mathrm{T}}^{*}, x_{\mathrm{T}+1}^{*}\right)\left(x_{\mathrm{T}}-x_{\mathrm{T}}^{*}\right)$$

Τότε, αν ικανοποιείται και η συνθήκη (II.2), $\lim_{\mathrm{T} \rightarrow \infty} \beta^{\mathrm{T}} \Phi_{1}\left(x_{\mathrm{T}}^{*}, x_{\mathrm{T}+1}^{*}\right)\left(x_{\mathrm{T}}-x_{\mathrm{T}}^{*}\right) \geq 0$, $\Delta \geq 0$, για κάθε εφικτό $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ Άρα, εξ ορισμού, το $\left\{x_{t+1}^{*}\right\}_{t=0}^{\infty}$ είναι λύση του Βασικού Προβλήματος, (I.27)-(I.29). *Q.E.D.*

Παρατήρηση 4 (Μοναδική Λύση): Είναι προφανές από την παραπάνω απόδειξη, ότι αν η Φ είναι επιπλέον αυστηρά κοίλη, οπότε:

$$\Phi\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) > \Phi\left(x_t, x_{t+1}\right) + \Phi_1\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right)\left(x_t^* - x_t\right) + \Phi_2\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right)\left(x_{t+1}^* - x_{t+1}\right)$$

για κάθε $\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right), \left(x_t, x_{t+1}\right) \in \mathrm{A}$. Τότε, αν βρεθεί κάποιο εφικτό σχέδιο, $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$, *τέτοιο ώστε* $x_{t+1}^* \in \operatorname{int}\left[\Gamma\left(x_t^*\right)\right]$, $\forall t \geq 0$,που ικανοποιεί την συνθήκη Euler, την Αρχική συνθήκη και την συνθήκη (ΙΙ.2), το σχέδιο αυτό είναι η μοναδική λύση του Βασικού Προβλήματος.

Η συνθήκη (ΙΙ.2) δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη, γιατί βασίζεται σε ένα οποιοδήποτε εφικτό σχέδιο, $\left\{x_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$. Αν επιβάλουμε όμως κάποιους επιπλέον περιορισμούς , που δεν είναι ιδιαίτερα δεσμευτικοί στα οικονομικά υποδείγματα, η συνθήκη (ΙΙ.2) μπορεί να πάρει μια ιδιαίτερα εύχρηστη μορφή.

Παρατήρηση 5 (Η Τερματική Συνθήκη): Εφόσον $x_{t+1} \in X = \Gamma\left(X\right) \subseteq \mathbb{R}_+^n$ και $\Phi_1\left(x_t, x_{t+1}\right) \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall\left(x_t, x_{t+1}\right) \in \operatorname{int}\left(A\right)$, η συνθήκη (ΙΙ.2) έπεται από την συνθήκη:

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \beta^{\mathrm{T}} \Phi_1\left(x_{\mathrm{T}}^*, x_{\mathrm{T}+1}^*\right) x_{\mathrm{T}+1}^* = 0 \qquad \text{(ΙΙ.3)}$$

Η συνθήκη (ΙΙ.3) ονομάζεται Τερματική Συνθήκη (Transversality Condition). Συμπερασματικά επομένως, αν η Συνθήκη Euler ικανοποιείται και η αντικειμενική συνάρτηση F είναι κοίλη, εφόσον η Τερματική Συνθήκη ικανοποιείται, τότε η Συνθήκη Euler είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ να είναι μία λύση στο Βασικό Πρόβλημα (2.1)-(2.3). Αν η F είναι αυστηρά κοίλη, τότε η Συνθήκη Euler είναι αναγκαία και ικανή για μοναδική λύση του Βασικού Προβλήματος.

2.4 Παραδείγματα Τερματικής Συνθήκης

Στην περίπτωση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, ισχύουν οι περιορισμοί της Παρατήρησης 5 και η αντίστοιχη τερματική συνθήκη για το πρόβλημα αυτό είναι:

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \beta^{\mathrm{T}} U'\left(c_{\mathrm{T}}\right) k_{\mathrm{T}+1} = 0 \qquad \text{(ΙΙ.4)}$$

Το νόημά της είναι ότι το διαθέσιμο απόθεμα κεφαλαίου $k_{\mathrm{T}+1}$ στο άπειρο, ήτοι το απόθεμα μετά το τέρμα *T* του χρονικού ορίζοντα καθώς το τέρμα τείνει στο άπειρο, πρέπει να έχει μηδενική παρούσα αξία, $\beta^{\mathrm{T}} U'\left(c_{\mathrm{T}}\right) k_{\mathrm{T}+1}$.

Άσκηση ΙΙ.1: Βρείτε την τερματική συνθήκη για την λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, στις περιπτώσεις της Άσκησης Ι.5.