Στοιχεία Θεωρίας Πραγματικών Μητρών

Έχουμε ήδη μελετήσει στοιχεία της δομής του $M_{n\times m}$ (το σύνολο των $n\times m$ πραγματικών μητρών) ως διανυσματικού χώρου επί των πραγματικών με τις πράξεις της κατά σημείο πρόσθεσης και κατά σημείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού με πραγματικό. Στο παρόν θα ασχοληθούμε με περαιτέρω πράξεις οι οποίες είναι δυνατόν να ορίζονται (και) μεταξύ μητρών διαφορετικών διαστάσεων ή/και να έχουν ως αποτέλεσμα μήτρα διαφορετικής διάστασης.

1. Τετραγωνικές μήτρες

Ορ. Η $A\in M_{n\times m}$ θα αναφέρεται τετραγωνική (square matrix) διαστάσεων $n\times n$ αν $n=m$.

Π.χ. $n=m=2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Σε κάθε τετραγωνική μήτρα ορίζεται η έννοια της κύριας διαγωνίου (main diagonal). Έτσι αν $A\in M_{n\times n}$ η κύρια διαγώνιος της A είναι το $n\times 1$ διάνυσμα $\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}$

Σημ. το διάνυσμα από τα στοιχεία της A που η τιμή του δείκτη γραμμής ταυτίζεται με την τιμή του δείκτη στήλης, διατεταγμένα σύμφωνα με τις τιμές των δεικτών τους, το οποίο εμφανίζεται στην μήτρα ως:

$$A=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν $A,B\in M_{n\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

i. κύρια διαγώνιος $(A+B)$ = κύρια διαγώνιος (A) + κύρια διαγώνιος (B)

ii. κύρια διαγώνιος (λA) = $\lambda\cdot$ κύρια διαγώνιος (A)

(Δείξτε τα i., ii.).

Ορ. Ίχνος (trace) τετραγωνικής μήτρας αναφέρεται το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή αν $A\in M_{n\times n}$, τότε $tr(A):=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}=x_{11}+x_{22}+\dots+x_{nn}$. □

Προφανώς εξαιτίας των παραπάνω i, ii θα έχουμε ότι

$$i^*.\ tr(A+B) = tr(A) + tr(B),\ \text{και}$$
$$ii^*.\ tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$$

(Δείξε τα i^*, ii^*).

Ορ. Η $A \in M_{n\times n}$ αναφέρεται συμμετρική αν $x_{ij} = x_{ji}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$ (symmetric matrix). □

Σχόλιο. Όταν $i=j$ τότε $x_{ii} = x_{ii}$ $\forall i = 1,\dots,n$, $\forall A \in M_{n\times n}$. Η ιδιότητα της συμμετρίας επομένως αφορά τα στοιχεία <u>εκτός</u> της κυρίας διαγωνίου, και επιβάλλει το στοιχείο της i-οστής γραμμής και j-οστής στήλης να είναι ίσο με το στοιχείο της j-οστής γραμμής και i-οστής στήλης. Έτσι η $A \in M_{n\times n}$ είναι συμμετρική αν έχει την μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν $A, B \in M_{n\times n}$, συμμετρικές και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$i_*.\ A+B\ \text{συμμετρική}$$
$$ii_*.\ \lambda A\ \text{συμμετρική}$$

(Δείξε τα i_*, ii_*).

Ορ. Μια συμμετρική μήτρα θα αναφέρεται διαγώνια αν $x_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$ (Diagonal matrix). □

Σχόλιο. Διαγώνια επομένως θα ονομάζεται όποια τετραγωνική μήτρα έχει <u>κάθε</u> στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου ίσο με το μηδέν. Μια τέτοια μήτρα θα έχει αναγκαστικά την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Αναλόγως με τα προηγούμενα αν $A, B \in M_{n\times n}$, διαγώνιες και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

iii. $A+B$ διαγώνια,

iv. AA διαγώνια

(Δείξτε τα iii, iv).

Παράδειγμα. Η μηδενική μήτρα διαστάσεων $n \times n$, $O_{n\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{-στήλες}} \Big\} n\text{-γραμμές}$

είναι διαγώνια.

Ορ. Η διαγώνια $n \times n$ μήτρα για την οποία $x_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$, δηλ. η

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{-στήλες}} \Big\} n\text{-γραμμές}$$

αναφέρεται ταυτοτική ή μοναδιαία μήτρα διαστάσεων $n \times n$ (Identity Matrix).

2. Αναστροφή Μητρών

Ορ. Η αναστροφή μήτρας ορίζεται να είναι η σχέση $(\cdot)' : M_{n\times m} \to M_{m\times n}$ που ενεργεί ως εξής: μετασχηματίζει την $A \in M_{n\times m}$ στην $A' \in M_{m\times n}$, όπου η A' έχει ως στήλες τις γραμμές της A, και ως γραμμές τις στήλες της A, δηλαδή ισοδύναμα το στοιχείο y_{ij} της A' ισούται με το στοιχείο x_{ji} της A, $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Σχόλιο. Προφανώς η σχέση της αναστροφής είναι καλώς ορισμένη $\forall A \in M_{n\times m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$. Έτσι αν η

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \text{ τότε } A' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

- Όταν $n = m = 1$ τότε $A' = A$.
- Όταν $n > 1$, $m = 1$ οπότε $A = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, τότε $A' = \mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots x_n)$ (μετασχηματισμός του διανύσματος στήλη σε γραμμή).
- Όταν $n = 1$, $m > 1$ οπότε $A = \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, τότε $A' = \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ (μετασχηματισμός του διανύσματος γραμμή σε στήλη).

- Η αναστροφή μετασχηματίζει μια μήτρα σε άλλη που έχει γενικά διαφορετικές διαστάσεις, οπότε μετασχηματίζει ένα στοιχείο του $M_{n\times m}$ σε στοιχείο του $M_{m\times n}$. Προφανώς η αναστροφή δεν αλλάζει τις διαστάσεις αν $m=n$, δηλ. η A είναι τετραγωνική.
- Λαμβάνοντας υπ' όψη και το προηγούμενο παρατηρούμε ότι $A'=A$ αν $m=n$ και $x_{ij}=x_{ji}$ $\forall i,j=1,\dots,n$. Δηλ. η A θα ταυτίζεται με την ανάστροφή της αν η A είναι συμμετρική (αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ως ορισμός της συμμετρίας). □

Αναστροφή και πράξεις: Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν $A,B\in M_{n\times m}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

$$① \quad (A+B)' = A'+B' \quad (\in M_{m\times n})$$

$$② \quad (\lambda A)' = \lambda A' \quad (\in M_{m\times n})$$

(Δείξτε τις ①, ②).

Ανάστροφοι και χώροι γραμμών και στηλών:
Από τους σχετικούς ορισμούς προκύπτει εύκολα ότι ο χώρος γραμμών της A θα ταυτίζεται με τον χώρο στηλών της A', ενώ ο χώρος στηλών της A θα ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών της A'. □

Αναστροφή και ίχνος.
Όταν $m=n$ και επειδή όταν $i=j$, $x_{ij}=x_{ji}$ η αναστροφή δεν αλλάζει την κύρια διαγώνιο. Επομένως όταν $A\in M_{n\times n}$, $tr(A) = x_{11}+\dots+x_{nn} = tr(A')$. □

3. Πολλαπλασιασμός μητρών

Το παρακάτω είναι ένας τρόπος να ορίσουμε γινόμενο μεταξύ μητρών ο οποίος είναι "συμβατός" με την αναπαράσταση μιας μήτρας ως κάποιου είδους μετασχηματισμού μεταξύ διανυσματικών χώρων (βλ. σχετικό σχόλιο παρακάτω).

Ορισμός Γινομένου. Έστω $A\in M_{n\times m}$ και $B\in M_{n^*\times m^*}$ ($n,m,n^*,m^*\in\mathbb{N}^*$). Το γινόμενο AB ορίζεται αν $m=n^*$ (ταύτιση "εσωτερικών" διαστάσεων), οπότε και $AB\in M_{n\times m^*}$ και είναι η μήτρα της οποίας το στοιχείο στην θέση

ij (για $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m^*$) προκύπτει ως το <u>Ευκλείδιο</u> εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής της A με την j-οστή στήλη της B. Δηλαδή το AB ορίζεται αν $A\in M_{n\times m}$, $B\in M_{m\times m^*}$, και αν

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m^*} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m^*} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm^*} \end{pmatrix}$$

τότε $\Gamma := AB \in M_{n\times m^*}$, δηλαδή

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m^*} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m^*} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nm^*} \end{pmatrix} \quad \text{όπου}$$

$$\gamma_{ij} := \left\langle \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{im} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix} \right\rangle = x_{i1}y_{1j} + x_{i2}y_{2j} + \dots + x_{im}y_{mj} = \sum_{p=1}^{m} x_{ip}y_{pj}. \ \square$$

Σχόλια:

1. Όταν ισχύει το $m=n^*$ τότε οι A,B λέγονται σύμμορφες (conformal). Η συμμορφία εξασφαλίζει ότι τα γ_{ij} θα είναι καλώς ορισμένα αφού θα προκύπτουν από εσωτερικά γινόμενα m-διάστατων διανυσμάτων.
2. Ακόμα και όταν $m=n^*$ (οπότε είναι καλώς ορισμένο το AB), είναι δυνατόν $m^*\neq n$ (οπότε δεν θα ορίζεται το BA - μη συμμορφία ως προς αυτό το γινόμενο). Προφανώς τα AB και BA θα είναι <u>ταυτόχρονα</u> καλώς ορισμένα αν $n=n^*=m=m^*$ οπότε και οι δύο πίνακες είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, γενικά όμως θα έχουμε $AB\neq BA$, δηλ. ο πολλαπλασιασμός <u>δεν</u> είναι μεταθετικός. π.χ. $n=n^*=m=m^*=2$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1 \\ 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2\end{pmatrix}=\dots=BA.\ \square$
3. Όταν $A,I\in M_{n\times n}$ τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί (δείξτε το) ότι $AI=IA=A$ οπότε η $n\times n$ I είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού <u>μέσα</u> στο $M_{n\times n}$.
4. Το γινόμενο όποτε είναι εφικτό δεν αλλάζει γενικά τις διαστάσεις των εμπλεκόμενων

μητρών εκτός της περίπτωσης που οι A,B είναι σύμμορφες τετραγωνικές. □

Προσεταιριστικότητα: Αν $A\in M_{n\times m}$, $B\in M_{m\times n^*}$, $\Gamma\in M_{n^*\times k}$ τότε το

$AB\Gamma$ είναι καλώς ορισμένο (γιατί;), βρίσκεται στο $M_{n\times k}$ και ισχύει ότι $AB\Gamma=\underset{\in M_{n\times n^*}}{(AB)}\Gamma = A\underset{\in M_{m\times k}}{(B\Gamma)}$. □

Αλληλεπίδραση μεταξύ γινομένου και των πράξεων διανυσματικού χώρου:
Αν $A\in M_{n\times m}$, $B,\Gamma\in M_{m\times k}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε
(1)' $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$
(2)' $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.
(Δείξτε τα (1)', (2)').

Αλληλεπίδραση μεταξύ γινομένου και αναστροφής:
Αν $A\in M_{n\times m}$, $B\in M_{m\times k}$ τότε
$$M_{k\times n}\ni (AB)'=\underset{\in M_{k\times m}}{B'}\,\underset{\in M_{m\times n}}{A'}.$$

Φυσικές Δυνάμεις Μητρών: Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα και εφόσον $A\in M_{n\times n}$, αν $k\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι
$$A^k=\begin{cases} I & \text{αν } k=0\\ \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k\text{-φορές}} & \text{αν } k>0\end{cases}\in M_{n\times n}.$$

- Έτσι π.χ. συνδυάζοντας το παραπάνω και την αλληλεπίδραση με την πρόσθεση έχουμε ότι αν $A,B\in M_{n\times n}$, $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A\cdot A+A\cdot B+B\cdot A+B\cdot B$
$=A^2+AB+BA+B^2$ (προσοχή εξαιτίας της μη μεταθετικότητας αυτό γενικά θα είναι διάφορο του $A^2+2AB+B^2$).

- Όταν A,B σύμμορφες διαγώνιες, δηλ. $A,B\in M_{n\times n}$ και $A=\begin{pmatrix}x_{11}&0&\cdots&0\\0&x_{22}&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&\\0&0&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn}\end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad AB=\begin{pmatrix} x_{11}y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}y_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}y_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}x_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn}x_{nn}\end{pmatrix} = BA \ (\text{γιατί;}).$$

Επομένως το γινόμενο σύμμορφων διαγώνιων, είναι μεταθετικό, και έχει ως αποτέλεσμα διαγώνια μήτρα με στοιχεία τα γινόμενα των αντίστοιχων διαγωνίων στοιχείων. Επομένως για την προηγούμενη A, έχουμε ότι $A^k=\begin{pmatrix} x_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}^k\end{pmatrix}$.

Εκθετικό Μήτρας:

Μας δίνεται ότι για την εκθετική συνάρτηση $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Το παραπάνω αναφέρεται ανάπτυγμα McLaurin (σε δυναμοσειρά) της εκθετικής συνάρτησης και για να το καταλάβουμε πλήρως μας χρειάζονται έννοιες ανάλυσης. "Αλγεβρικά" εμφανίζει το εκθετικό ενός x ως "απειροπληθές" άθροισμα όρων της μορφής $\frac{x^i}{i!}$. Αυτό μαζί με τα παραπάνω περί δυνάμεων τετραγωνικών μητρών μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την έννοια του εκθετικού σε τετραγωνικές μήτρες.

Ορισμός [Εκθετικό Τετραγωνικής Μήτρας] Αν $A\in M_{n\times n}$ τότε το εκθετικό της A είναι η $n\times n$ μήτρα που ορίζεται ως εξής:

$$\exp(A) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \quad . \square$$

Σχόλιο: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το $\exp(A)$ είναι καλώς ορισμένο $\forall A\in M_{n\times n}$.

Παράδειγμα. Αν $A=\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}$, τότε τα παραπάνω ως προς την μορφή της A^k, και ο ορισμός του αναπτύγματος McLaurin μας δείχνουν ότι

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\begin{pmatrix} x_{11}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}^i\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x_{11}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x_{22}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x_{nn}^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x_{11}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(x_{22}) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(x_{nn})\end{pmatrix},$$

Δηλαδή το εκθετικό διαγώνιας μήτρας είναι η διαγώνια μήτρα με διαγώνια στοιχεία τα εκθετικά των αντίστοιχων διαγωνίων στοιχείων της A. Έτσι π.χ.

$$\exp(I) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = eI.$$

4. Αντιστροφή Μήτρας

Το παρακάτω γενικεύει την έννοια του πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου που έχουμε στο $\mathbb{R}$, στον $M_{n\times n}$.

Ορισμός [Αντίστροφη Μήτρας] Έστω $A \in M_{n\times n}$. Αυτή θα ονομάζεται αντιστρέψιμη (invertible) αν $\exists\, A^{-1} \in M_{n\times n}$ τέτοια ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Όταν η A^{-1} δεν υπάρχει τότε η A ονομάζεται ιδιάζουσα (singular).

Σχόλια:

1. Όταν η A^{-1} υπάρχει τότε είναι μοναδική. Αυτό επειδή αν η A^* είναι επίσης αντίστροφη τότε

$$A^{-1}AA^* \overset{\text{προσ.}}{=} (A^{-1}A)A^* \overset{\text{ορ.}}{=} IA^* = A^*$$
$$A^{-1}AA^* \overset{\text{προσ.}}{=} A^{-1}(AA^*) \overset{\text{ορ.}}{=} A^{-1}I = A^{-1}.$$

2. Βάσει του 1. και επειδή αναγκαστικά $I \cdot I \overset{\text{ορ.}}{=} I$ η ταυτοτική είναι αντιστρέψιμη και $I^{-1} = I$.

3. Η $O_{n\times n}$ είναι ιδιάζουσα (γιατί;) αλλά όταν $n>1$ δεν είναι η μόνη. Π.χ. όταν $n=2$ η $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιάζουσα αφού το στοιχείο στην θέση $2,2$ της AB θα είναι ίσο με το 0, $\forall B \in M_{2\times 2}$. (γιατί;)

4. Αν $A, B \in M_{n\times n}$ τότε η AB είναι αντιστρέψιμη αν οι A, B αντιστρέψιμες. Επίσης

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I \text{ και}$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I, \text{ οπότε}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. Η έννοια της αντιστροφής επιτρέπει την γενίκευση της δύναμης μήτρας σε αρνητικούς εκθέτες. Έτσι αν $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$, τότε η A^k είναι καλώς ορισμένη αν η A είναι αντιστρέψιμη οπότε

$$A^k = (A^{-1})^{-k}.$$

Παράδειγμα. Αν η A διαγώνια τότε $AB=BA=I$ ανν $1/x_{ii} \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n \iff$ $x_{ii} \neq 0$ $\forall i=1,\dots,n$. Σε αυτή την περίπτωση

$$A^{-1}=B=\begin{pmatrix} x_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$ Έτσι π.χ.

η $\exp(A)$ είναι πάντα αντιστρέψιμη (γιατί;) και $(\exp(A))^{-1} = \begin{pmatrix} (e^{x_{11}})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (e^{x_{22}})^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (e^{x_{nn}})^{-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^{-x_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-x_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-x_{nn}} \end{pmatrix} = \exp(-A)$$ το οποίο συνάδει με τα όσα ξέρουμε για το εκθετικό στους πραγματικούς αριθμούς. □

Γενικό Σχόλιο: Διαδικασίες όπως αυτή της εύρεσης της αντιστρόφου (ή νωρίτερα της διαπίστωσης της αντιστρεψιμότητας) ή του υπολογισμού του εκθετικού μήτρας, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν την εκτέλεση μεγάλου πλήθους από πράξεις μεταξύ των στοιχείων των εμπλεκόμενων μητρών, ειδικά αν οι διαστάσεις είναι μεγάλοι φυσικοί αριθμοί. Τα παραπάνω μας λένε ότι η "υπολογιστική πολυπλοκότητα" αυτών των διαδικασιών είναι "σχετικά μικρή" όταν οι εμπλεκόμενες μήτρες είναι διαγώνιες. □

Τα παραπάνω βρίσκονται σε καθεστώς διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ, εφόσον εντοπίσετε οποιο λάθος να το αναφέρετε στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.