Παράδειγμα Ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt για Πολυώνυμα.

Έστω ότι $V = \{ f:[0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο} \}$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $L_2$ ($\langle f,g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $f,g \in V$). Έστω ότι $x \in [0,1]$ και $V_n = \{x, x^2\}$.

Έχουμε ότι:

α. $\langle x,x^2 \rangle = \int_0^1 x x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = x^4/4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

β. $\|x\| = \left(\int_0^1 x x\, dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^{1/2} = \left(x^3/3 \Big|_0^1\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

γ. $\|x^2\| = \left(\int_0^1 x^2 x^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x^4 dx\right)^{1/2} = \left(x^5/5 \Big|_0^1\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Παρατηρούμε ότι $\langle x,x^2 \rangle = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{\sqrt{15}} = \|x\| \|x^2\|$ οπότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει γνήσια και επομένως (γιατί;) το $V_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως ο αλγόριθμος Gram-Schmidt είναι εφαρμόσιμος σε αυτή την περίπτωση. Αν $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=x^2$ έχουμε ότι:

1. $f_1^* := \frac{f_1}{\|f_1\|} = \sqrt{3}\, x, \quad \forall x \in [0,1],$

2. $$f_2^* := f_2 - \langle f_2, f_1^* \rangle f_1^* = f_2 - \left\langle f_2, \frac{f_1}{\|f_1\|} \right\rangle f_1^*$$
$$= f_2 - \frac{1}{\|f_1\|} \langle f_2, f_1 \rangle f_1^* = x^2 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} x$$
$$= x^2 - \frac{3}{4} x, \quad \forall x \in [0,1].$$

(Ελέγξτε ότι τα $f_1^*, f_2^*$ είναι ορθογώνια)

3. $f_2^{*} = \frac{f_2^*}{\|f_2^*\|}$, $\|f_2^*\| = \left( \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)^2 dx \right)^{1/2} =$

$$= \left( \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx \right)^{1/2} = \left[ \left( x^5/5 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{16}x^3 \right) \Big|_0^1 \right]^{1/2} = \left( \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{128 - 3\cdot 80 + 3\cdot 40}{640}\right)^{1/2} = \left(\frac{128-120}{640}\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{640}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{80}},$$ οπότε

$$f_2^*(x) = \left(x^2 - 3/4\, x\right)\sqrt{80} = \sqrt{80}\, x^2 - 3\sqrt{40}\, x.$$

Επομένως το $V_n^* = \{\sqrt{3}x, \sqrt{80}x^2 - 3\sqrt{40}\,x\}$ είναι ορθοκανονικό.

Βρείτε σε ποιό ορθοκανονικό σύνολο θα καταλήγαμε μέσω του αλγόριθμου Gram-Schmidt αν θέταμε $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$.