6η Ομάδα Ασκήσεων

1. Να δειχθεί για το $A\mathbf{x}=0_{n\times 1}$, όπου $A\in M_{n\times n}$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, το σύνολο λύσεων του αποτελεί διανυσματικό υποχώρο του $\mathbb{R}^n$.

2. Να δειχθεί για το $A\mathbf{x}=0_{n\times 1}$, όπου $A\in M_{n\times n}$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ (τετραγωνικό) και μία από τις γραμμές της A είναι μηδενική, ότι έχει άπειρες λύσεις.

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω μήτρες να βρεθεί η ορίζουσα:

$$A=(2),$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Να δειχθεί ότι αν η $A\in M_{n\times n}$ ταυτοδύναμη (δηλ. $A^2=A$) τότε $\det(A)$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 ή 1.

5. Να δειχθεί ότι το σύστημα $A\mathbf{x}=b$ όπου $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ έχει μοναδική λύση χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την ορίζουσα της A.

6. Για κάθε μία από τις μήτρες της άσκησης 3, να βρεθεί η $\operatorname{adj}(A)$.

7. Για κάθε μία από τις μήτρες της άσκησης 3, να βρεθεί (όταν υπάρχει) η A^{-1} χρησιμοποιώντας τις $\det(A)$, $\operatorname{adj}(A)$.

8. Για το σύστημα της άσκησης 5 να βρεθεί η μοναδική λύση όταν $b=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$.

9. Για το σύστημα $A\mathbf{x}=b$ όπου $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

να βρεθεί η μοναδική του λύση χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την ανάστροφη της μήτρας των συντελεστών όταν $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$, $b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$.

10. Για την $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα αυτής.

11. Για την $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ να βρεθούν οι συντελεστές P,Λ

στην ορθογώνια διαγωνιοποίηση της, $A = P\Lambda P'$.

12. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 11 να βρεθεί η $\exp(tA)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Ισχύει ή όχι η ιδιότητα της "δυναμικής ευστάθειας" για συστήματα της μορφής $Y(t) = Y_0 + \exp(tA)\,C$, $Y_0, C \in \mathbb{R}^2$;

13. Για την $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ να βρεθεί η $A^{1/3}$, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 11. Υπάρχει η $A^{1/2}$;