Εφαρμογή Εκθετικού Μήτρας

Έστω $A\in M_{n\times n}$, $Y_0, C\in\mathbb{R}^n$ και $t\in\mathbb{R}$. Δεδομένων αυτών έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$Y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n \text{ που ορίζεται ως}$$

$$(*)\quad Y(t) = Y_0 + \exp(tA)C.$$

Η παράσταση σε κάθε $t\in\mathbb{R}$ αποδίδει το διάνυσμα $Y(t)\in\mathbb{R}^n$ για κατασκευάζεται ως εξής:

1. Κατασκευάζεται η $tA\in M_{n\times n}$,
2. Κατασκευάζεται το $\exp(tA)$, (είναι καλώς ορισμένο)
3. κατασκευάζεται το $\exp(tA)C\in\mathbb{R}^n$,
4. Το $Y(t)$ προκύπτει από το άθροισμα $Y_0+\exp(tA)C$.

Η συνάρτηση αυτή είναι δυνατόν να αναπαριστά κάποιο δυναμικό σύστημα, να περιγράφει δηλαδή την εξέλιξη στον χρόνο n-πιθανά αλληλοεξαρτώμενων "μεταβλητών", η κατάσταση των οποίων στην χρονική στιγμή t αναπαρίσταται από το n-διάστατο διάνυσμα $Y(t)$. Η $(*)$ είναι δυνατόν να προκύπτει ως "μέρος" του γενικού λύσεων κατάλληλου συστήματος διαφορικών εξισώσεων συνοδευόμενου από "περαιτέρω" συνθήκες.

Αν η μήτρα A είναι συμμετρική τότε και η tA επίσης για κάθε $t\in\mathbb{R}$, αφού $(tA)' = tA' = tA$. Επίσης η λ είναι ιδιοτιμή της A αν η $t\lambda$ είναι ιδιοτιμή της tA, $\forall t\neq 0$ αφού $(tA)\mathbf{x}=(t\lambda)\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, ενώ αν $t=0$, $tA=0_{n\times n}$ η οποία έχει n μηδενικές ιδιοτιμές. Τέλος, το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, αν το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της tA, όταν το $t\neq 0$ αφού $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (tA)\mathbf{x}=(t\lambda)\mathbf{x}$. Επομένως, και δεδομένου ότι η A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη, δηλ. $A = P\Lambda P'$ (εξηγήστε!), και για την tA έχουμε ότι $tA = P(t\Lambda)P'$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Συνεπώς όταν η A συμμετρική,

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \exp(tA) = P\exp(t\Lambda)P', \quad \text{όπου } \exp(t\Lambda)=\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}$$

όπου λ_i η i-οστή ιδιοτιμή της A. Οπότε για το $(*)$ έχουμε

$$Y(t) = Y_0 + P\exp(t\Lambda)P'C, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\lambda_i < 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, $e^{t\lambda_i} \to 0$ καθώς $t \to +\infty$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Αν λοιπόν όλες οι ιδιοτιμές της A είναι αρνητικές, $\lim_{t \to +\infty} \exp(tA) = 0_{n \times n}$ και

συνεπώς $\lim_{t \to +\infty} V(t) = V_0$, $\forall C \in \mathbb{R}^n$.

Η κοινή ασυμπτωτική συμπεριφορά του (*) για κάθε δυνατή τιμή του C συνδέεται με αυτό που ονομάζεται δυναμική ευστάθεια του συστήματος που περιγράφεται από το (*).

Παράδειγμα. Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -0.1-\lambda & 0.1 \\ 0.1 & -0.2-\lambda \end{pmatrix}$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A είναι το $\det(A - \lambda I) = (0.1+\lambda)(0.2+\lambda) - 0.01$
$= 0.02 + 0.3\lambda + \lambda^2 - 0.01 = \lambda^2 + 0.3\lambda + 0.01$. $\Delta = 0.3^2 - 4 \cdot 0.01 = 0.09 - 0.04 = 0.05$
οπότε, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-0.3 \pm \sqrt{0.05}}{2} \simeq \dfrac{-0.3 \pm 0.223}{2} \simeq \begin{cases} -0.038 \\ -0.261 \end{cases}$. Επομένως και οι δύο ιδιοτιμές

της A είναι αρνητικές και συνεπώς π.χ. για το $V(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \exp\left(\begin{pmatrix} -0.1t & 0.1t \\ 0.1t & -0.2t \end{pmatrix}\right) C$,

θα έχουμε ότι $\lim_{t \to +\infty} V(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ανεξάρτητα από την τιμή του C.

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Αν βρείτε οποιοδήποτε λάθος παρακαλώ επικοινωνείστε στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.