Ορθογώνια διαγωνιοποίηση και δυνάμεις πινάκων με πραγματικούς εκθέτες.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι αν η A είναι συμμετρική τότε είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη οπότε παραγοντοποιήσιμη σε μορφή $A = P\Lambda P'$. Αυτό είδαμε ότι διευκολύνει τον υπολογισμό του A^k που αναγκαστικά θα ισούται με $P\Lambda^k P'$ και

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

όταν $k \in \mathbb{N}$, ενώ το ίδιο ισχύει όταν $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$ αν η A αντιστρέψιμη, δηλαδή αν $\lambda_i^k \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\ldots,n$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \neq 0$ $\forall i=1,\ldots,n$ (γιατί;).

Το παραπάνω μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την A^k όταν $k \in \mathbb{R}$, ως:

$$A^k = P\Lambda^k P', \quad \text{με } \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

η οποία θα είναι καλώς ορισμένη αν $\lambda_i^k \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\ldots,n$.

Π.χ. η $A^{1/2}$ θα είναι καλώς ορισμένη αν $\lambda_i \geq 0$ $\forall i=1,\ldots,n$ (οπότε η A λέγεται θετικά ορισμένη).

Παράδειγμα. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ οπότε η κυβική ρίζα της A υπάρχει (γιατί;) και ισούται με

$$A^{1/3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{1/3} & 0 \\ 0 & (-3)^{1/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5^{1/3}/\sqrt{2} & 3^{1/3}/\sqrt{2} \\ 5^{1/3}/\sqrt{2} & -3^{1/3}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5^{1/3}-3^{1/3}}{2} & \frac{5^{1/3}+3^{1/3}}{2} \\ \frac{5^{1/3}+3^{1/3}}{2} & \frac{5^{1/3}-3^{1/3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υπο-
καθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος εντοπίσετε
στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.