# Στοιχεία Θεωρίας Μητρών - Σχόλια στις έννοιες - Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων — Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση Συμμετρικών μητρών.

Αν $A \in M_{n\times n}$ τότε ιδιοδιάνυσμα της $A$ αναφέρεται όποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα:

$$(*) \quad Ax = \lambda x \quad \text{όπου πραγματικός αριθμός.}$$

Επειδή $\lambda x = \lambda I x$ (I αναφέρεται η $n\times n$ ταυτοτική-μοναδιαία μήτρα)

$(*) \iff Ax - \lambda I x = O_{n\times 1} \iff (A-\lambda I)x = O_{n\times 1}$ $(**)$. Το $(**)$ είναι τετραγωνικό $n\times n$ ομογενές σύστημα με μήτρα συντελεστών την $A-\lambda I$. Προφανώς έχει ως λύση οποιοδήποτε το $x = O_{n\times 1}$, αλλά όταν $\lambda$ τέτοιο ώστε $\operatorname{rank}(A-\lambda I)<n \iff$ (γιατί;) $\det(A-\lambda I)=0$ $(***)$ έχει άπειρες λύσεις (γιατί;).

Από τον ορισμό της ορίζουσας έχουμε ότι το $\det(A-\lambda I)$ είναι πολυώνυμο $n$-οστού βαθμού ως προς $\lambda$ που αναφέρεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $A$ (characteristic polynomial). Οι $n$ ρίζες του, δηλαδή οι λύσεις της $(***)$ που αναφέρεται χαρακτηριστική εξίσωση της $A$, αναφέρονται ιδιοτιμές της $A$ (eigenvalues). Αν $\lambda^*$ ιδιοτιμή της $A$ τότε όποιο $x^* \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την $Ax^* = \lambda^* x^*$ αναφέρεται ιδιοδιάνυσμα της $A$ (eigenvector) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda^*$.

Παράδειγμα. $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, οπότε $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, και άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $A$ είναι το $\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 16 = \lambda^2 - 2\lambda - 15$.

Για αυτό έχουμε ότι $\Delta = 4 - 4(-15) = 64$, οπότε οι δύο ιδιοτιμές της $A$ είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = 5, \ -3$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = 5$ είναι τα $x \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν το σύστημα $(A-5I)x = O_{2\times 1} \iff \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \left.\begin{array}{l} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{επομένως}$$

είναι τα διανύσματα της μορφής $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ (γιατί το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις;). Αναλόγως για την $\lambda_2 = -3$ έχουμε το

$$(A-(-3)I)x = 0_{2\times 1} \iff \left.\begin{matrix} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ \cancel{4x_1 + 4x_2 = 0} \end{matrix}\right\} \iff x_1 = -x_2$$

οπότε ως ιδιοδιανύσματα έχουμε τα $x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ για την $\lambda_2 = -3$. □

Παρατηρήσεις - Ιδιότητες:

1. Το $\det(A-\lambda I)$ έχει πάντοτε $n$-ρίζες σαν μιγαδικούς αριθμούς κάποιοι από τις οποίες μπορεί να είναι πολλαπλές (αλγεβρική πολλαπλότητα ιδιοτιμών). Επομένως κάθε $A_{n\times n}$ έχει $n$ ιδιοτιμές. Από την θεωρία πολυωνύμων είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν η $A$ συμμετρική τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές.

2. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda$ της $A$ σχηματίζουν υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή (βλ. το παράδειγμα, σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί από ένας μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$). Αυτός ονομάζεται ιδιοχώρος της $A$ (eigenspace) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda$. Κάθε στοιχείο του ιδιοχώρου της $A$ που αντιστοιχεί στην $\lambda$, όταν πολλαπλασιαστεί από αριστερά με την $A$, δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τον πολλαπλασιασμό του με το βαθμωτό $\lambda$. Επομένως το γινόμενο εξακολουθεί να παραμένει στον ιδιοχώρο, ενώ έχει Ευκλείδειο μήκος ίσο με το Ευκλείδειο μήκος του αρχικού επί $|\lambda|$ και προσανατολισμό που εξαρτάται από τον πολλαπλασιασμό του αρχικού και το πρόσημο της $\lambda$. Επομένως οι ιδιοχώροι της $A$ είναι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που παραμένουν "αναλλοίωτοι" από τον πολλαπλασιασμό με την $A$ από αριστερά. Τέλος η διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην $\lambda$ (γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda$) έχει σχέση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda$. Γίνεται αντιληπτό ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα αναπαριστούν σημαντικές ιδιότητες της $A$ ως "μετασχηματισμού" στοιχείων του $\mathbb{R}^n$.

3. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της $A$ είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ ενώ $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Το τελευταίο μας λέει ότι $\det(A) = 0 \iff \lambda_i \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$ οπότε συμπληρώνουμε την ισοδυναμία:

$A$ αντιστρέψιμη $\iff$ $rank(A) = n$ $\iff$ χώρος γραμμών$(A)$ = χώρος στηλών$(A) = \mathbb{R}^n$ $\iff$ το σύνολο των στηλών είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ $\iff$ το σύνολο των στηλών της $A$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$

$\iff$ όλες οι ιδιοτιμές της $A$ είναι διάφορες του μηδενός.

4. Αν η $A$ διαγώνια τότε οι ιδιοτιμές της είναι τα διαγώνια στοιχεία της $A$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $tr(A) = \alpha_{11}+\alpha_{22} = 1+1 = 2 = 5+(-3) = \lambda_1+\lambda_2$, $det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1-16 = -15 = 5(-3) = \lambda_1\lambda_2$. □

## Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση Συμμετρικής Μήτρας.

Αν η $A \in M_{n\times n}$ συμμετρική, πέραν του ότι η $A$ έχει $n$ πραγματικές ιδιοτιμές (πβλ 1) είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν να επιλεγούν η ιδιοδιανύσματα της $A$ με τρόπο τέτοιο ώστε αυτά να συγκροτούν ορθοκανονικό σύνολο. Αν $P$ λοιπόν η $n\times n$ μήτρα που έχει ως στήλες τα στοιχεία της παραπάνω επιλογής, διατεταγμένες σύμφωνα με τις ιδιοτιμές, τότε η $P$ είναι ορθογώνια μήτρα (γιατί;) οπότε ισχύει ότι $P'=P^{-1}$. Επιπλέον αν $\Lambda$ η διαγώνια $n\times n$ μήτρα με $i$-οστό διαγώνιο στοιχείο την ιδιοτιμή της $A$ που αντιστοιχεί στην $i$-οστή στήλη της $P$ τότε έχουμε ότι:

$$A = P\Lambda P' \quad (*).$$

Η σχέση $(*)$ μας πληροφορεί ότι η $A$ είναι "παρόμοια" με την διαγώνια μήτρα $\Lambda$, και αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο δεδομένου του πόσο εύκολα διαχειρίσιμες είναι οι διαγώνιες μήτρες π.χ. ως προς την υπολογιστική πολυπλοκότητα των γινομένων. Η $(*)$ αναφέρεται για τους προφανείς λόγους ορθογώνια διαγωνιοποίηση της $A$ (orthogonal diagonalization), και τα παραπάνω μας λένε ότι οι συμμετρικές μήτρες συγκροτούν μια υποκατηγορία των τετραγωνικών μητρών που είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμες.

Παράδειγμα. Στο παράδειγμα όπου $A=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}$ έχουμε ότι το $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_1=5$ είναι ορθογώνιο (ως προς το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) με το $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_2=-3$, αλλά κανένα από αυτά δεν είναι κανονικά. Κανονικοποιώντας τα (κάντε το!) αποκτούμε το $v_n = \left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$ που είναι ορθοκανονικό (δείξτε το!) Έτσι αν $P=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\downarrow&\downarrow\\ \lambda_1&\lambda_2\end{matrix}\end{array}$, έχουμε ότι $P^{-1}=P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ (δείξτε το!)

και $\Lambda=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}$, οπότε $\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

(Επαληθεύστε το κάνοντας τις πράξεις! - Επίσης επιλέξτε ως $\Lambda^*=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $P^*=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ και δείξτε επίσης ότι $A=P^*\Lambda^*P^{*\prime}$.)

Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση — Δυνάμεις και Αντίστροφο.

Τα παραπάνω είναι δυνατόν να είναι εξαιρετικά χρήσιμα ως προς την απλοποίηση υπολογισμού δυνάμεων της $A$. Έτσι π.χ. αν $A=P\Lambda P'$ όπως παραπάνω

$$A^2=AA=(P\Lambda P')(P\Lambda P')=P\Lambda(P'P)\Lambda P'\overset{\text{γιατί;}}{=}P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P'=P\Lambda I\Lambda P'=P\Lambda\Lambda P'=P\Lambda^2P$$

και επειδή η $\Lambda$ είναι διαγώνια η $\Lambda^2$ είναι διαγώνια με διαγώνια στοιχεία τα τετράγωνα των αντίστοιχων διαγωνίων στοιχείων της $\Lambda$. Συνεχίζοντας επαγωγικά έχουμε ότι για $k\in\mathbb{N}$

$$A^k=P\Lambda^kP'=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k\end{pmatrix}P' \quad \text{(γιατί;)}.$$

Επομένως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $A^{5000}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{5000} & 0\\ 0 & (-3)^{5000}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

-κάντε τις πράξεις!

Όταν $\lambda_i\neq 0$ $\forall i=1,\dots,n$ οπότε η $A$ αντιστρέψιμη έχουμε ότι

$$A^{-1}=(P\Lambda P')^{-1}=(P')^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1}=(P^{-1})'\Lambda^{-1}P'=(P')'\Lambda^{-1}P'=P\Lambda^{-1}P'$$

αφού η $P$ ορθογώνια. Οπότε και η $A^{-1}$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη και επίσης όπως γνωρίζουμε

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n\end{pmatrix}$$

Επομένως δεδομένης της διαγωνιοποίησης η αντιστροφή είναι υπολογιστικά εύκολη.

Στο προηγούμενο παράδειγμα $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5 & 0\\ 0 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

- κάντε τις πράξεις!

Άσκηση. Επεκτείνετε τα παραπάνω και για $k\in\mathbb{Z}$ όταν $\lambda_i\neq 0$ $\forall i=1,\dots,n$. □

Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι δεδομένης της ορθογώνιας διαγωνιοποίησης είναι εύκολος και ο υπολογισμός του εκθετικού της $A$. Από τον σχετικό ορισμό σε μια τέτοια περίπτωση θα έχουμε:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P \Lambda^k P' = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k\right) P'$$

$$= P\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}\right] P' = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} P'$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P' = P \exp(\Lambda) P'$$

Το οποίο επίσης μας λέει ότι και η $\exp(A)$ είναι ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη.

Στο προηγούμενο παράδειγμα όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^5/\sqrt{2} & -e^{-3}/\sqrt{2} \\ e^5/\sqrt{2} & e^{-3}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^5+e^{-3}}{2} & \frac{e^5-e^{-3}}{2} \\ \frac{e^5-e^{-3}}{2} & \frac{e^5+e^{-3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^5+e^{-3} & e^5-e^{-3} \\ e^5-e^{-3} & e^5+e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διορθώσεως. Παρακαλώ αναφέρετε όποιο λάθος εντοπίσετε στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.