Στοιχεία Θεωρίας Μητρών: Ορθογώνιες Μήτρες

Έχουμε δει ότι μέρος του υπολογιστικού κόστους της εύρεσης λύσεων γραμμικού συστήματος είναι δυνατόν να αφορά και την διαδικασία αναστροφής κατάλληλης μήτρας. Έχουμε δει ότι αυτό το κόστος είναι γενικά υψηλό, εξαρτάται από το μέγεθος των διαστάσεων της μήτρας, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις, π.χ. στις διαγώνιες αντιστρέψιμες μήτρες, η αναστροφή είναι υπολογιστικά εύκολη. Η επόμενη έννοια προσφέρει μια ακόμη περίπτωση υπολογιστικά εύκολης αναστροφής.

Ορισμός. Η $A \in M_{n\times n}$ θα ονομάζεται ορθογώνια τετραγωνική μήτρα (orthogonal matrix) ανν οι στήλες της A συγκροτούν <u>ορθοκανονικό</u> (ως προς το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο) σύνολο. □

Παρατηρήσεις – Ιδιότητες:

1. Οι στήλες πρέπει να είναι ορθοκανονικές και όχι απλώς ορθογώνιες. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των στηλών δεν μπορεί να περιλαμβάνει το μηδενικό διάνυσμα, επομένως θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο (γιατί;) και άρα $\mathrm{rank}(A)=n$. Επομένως οι ορθογώνιες μήτρες είναι αναγκαστικά αντιστρέψιμες.
2. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η A ορθογώνια ανν το σύνολο των γραμμών της είναι επίσης ορθοκανονικό.
3. Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρών και της αναστροφής, όπως και από το ότι για το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο έχουμε $\langle x,y\rangle = x'y$ (γιατί;), είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν η A ορθογώνια τότε $A^{-1}=A'$. Επομένως η εύρεση της αντίστροφης ορθογώνιας μήτρας συνίσταται στην εύρεση της ανάστροφης.

Παράδειγμα. $n=2$, $A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ορθογώνια (γιατί;). Έχουμε ότι $A'=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ και $A'A=AA'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ όπως αναμέναμε.

4. Αν A ορθογώνια τότε το (αναγκαστικά τετραγωνικό) σύστημα $Ax=b$ έχει μοναδική λύση το $A'b$. Αυτό επειδή $\mathrm{rank}(A)=n$, οπότε $b \in$ χώρος στηλών(A)

και άρα το σύστημα έχει λύση, δεν υπάρχουν γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ή/και στήλες οπότε δεν χρειάζεται απαλοιφή εξισώσεων και έχει μοναδική λύση την $A^{-1}b$. Αλλά $A^{-1}=A'$ αφού η A ορθογώνια.

Παράδειγμα. Το σύστημα $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 1 \\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$ είναι το $A\mathbf{x}=b$ για

$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, εξαιτίας του προηγούμενου

παραδείγματος και της παρατήρησης 4 έχει μοναδική λύση την

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A'b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(επαληθεύστε το!)

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποιο λάθος εντοπίσετε στο eclass του μαθήματος ή στο stelios@aueb.gr.