4η Ομάδα Ασκήσεων

1. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : V\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως: αν $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ τότε $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$. Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|_\infty$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας (διαφόρο που – όπως είναι δυνατόν να δειχθεί – όταν $n>1$ τότε η $\|\cdot\|_\infty$ δεν προκύπτει από κάποιο εσωτερικό γινόμενο).

2. Έστω V διανυσματικός χώρος, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο V και $\|\cdot\|$ η νόρμα που προκύπτει από αυτό. Αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, η απόσταση (ως προς την $\|\cdot\|$) μεταξύ τους ορίζεται ως: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Να δειχθεί ότι η d ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

α. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq 0$ και $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y}$ (θετικά ορισμένη)

β. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=d(\mathbf{y},\mathbf{x})$, (συμμετρία)

γ. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\leq d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{z},\mathbf{y})$ (τριγωνική ανισότητα)

για οποια $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$.

3. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^3$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Να κανονικοποιηθεί το $V_n=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

4. Ως προς τα στοιχεία της άσκησης 3 να βρεθεί η γωνία μεταξύ οποιονδήποτε δύο από τα στοιχεία του V_n.

5. Έστω ότι $V=M_{2\times 2}$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το εσωτερικό γινόμενο Frobenius. Να κανονικοποιηθεί το $V_n=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\right\}$.

6. Ως προς τα στοιχεία της άσκησης 5 να βρεθεί η γωνία μεταξύ οποιονδήποτε δύο από τα στοιχεία του V_n.

7. Έστω V διανυσματικός χώρος και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο. Αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ όπου $\mathbf{x}$ κανονικό και αυτά είναι μεταξύ τους γραμμικά εξαρτημένα να βρεθεί το $\mathbf{y}-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle\mathbf{x}$.

8. Ως προς τα στοιχεία της άσκησης 3 να ορθοκανονικοποιηθεί εφόσον είναι εφικτό το V_n.

9. Ως προς τα στοιχεία της άσκησης 5 να ορθοκανονικοποιηθεί εφόσον είναι εφικτό το V_n.

10. Έστω ότι $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$, f συνεχής$\}$ και $\langle \cdot,\cdot \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο L_2. Να ορθοκανονικοποιηθεί εφόσον είναι εφικτό το $V_n = \{x, x^2, x^3\}$.

(Θυμηθείτε ότι το ορθοκανονικό σύνολο στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος Gram-Schmidt είναι δυνατόν να εξαρτάται από την επιλογή διάταξης για το V_n. Στις σχετικές ασκήσεις δοκιμάστε τουλάχιστον δύο διατάξεις προκειμένου να δείτε πού καταλήγετε).