Η Έννοια της Βάσης και η "Αποτελεσματικότητα" της περιγραφής των διανυσμάτων από τα στοιχεία της βάσης.

Έστω V διανυσματικός χώρος και v_n βάση αυτού. Αν $x \in V$ τότε το x μπορεί να εκφρασθεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός του v_n εξαιτίας του ότι το v_n είναι εξ ορισμού γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό ισχύει εξαιτίας του παρακάτω επιχειρήματος: ($v_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$)

Έστω ότι $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ για $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (i)

και $x = \lambda_1^* x_1 + \lambda_2^* x_2 + \dots + \lambda_n^* x_n$ για $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^* \in \mathbb{R}$ (ii)

με $\lambda_j \neq \lambda_j^*$ για ένα τουλάχιστον $j = 1, \dots, n$. (iii)

Αφαιρώντας τις (i)-(ii) κατά μέλη, έχουμε ότι

$$0 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n \quad \text{με } \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_1^*, \ \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_2^*, \dots, \mu_n = \lambda_n - \lambda_n^*$$

με $\mu_j \neq 0$ για ένα τουλάχιστον $j = 1, 2, \dots n$, εξαιτίας της (iii). Μα αυτό σημαίνει ότι το v_n είναι γραμμικά εξαρτημένο, κάτι που εξ' ορισμού είναι αδύνατο (εξηγείστε!).

Επομένως δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους το x να μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του v_n, οπότε υπάρχει μοναδικός τρόπος (αφού το v_n ως βάση, παράγει τον V).

Συνεπώς: όποια βάση περιγράφει "αποτελεσματικά" ("μονοσήμαντα") τον V αφού όποιο διάνυσμα του V μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης με μοναδικό τρόπο. [Το αντίστροφο ισχύει; (δηλ. αν ο V περιγράφεται "αποτελεσματικά" (με την παραπάνω έννοια) από το v_n, αυτό σημαίνει ότι το v_n είναι βάση;)].