Εσωτερικά Γινόμενα - Νόρμες [Αναθεώρηση με κόκκινο - 25/05/2017]

Η δομή που έχει ένας διανυσματικός χώρος είναι μόνο αλγεβρική. Αυτό συνεπάγεται ότι χωρίς περαιτέρω ιδιότητες δεν είναι δυνατόν να αποδοθούν γεωμετρικές ιδιότητες όπως η έννοια της γωνίας μεταξύ διανυσμάτων, ή αναλυτικές ιδιότητες όπως το μήκος τους ή η απόσταση μεταξύ τους. Ένας τρόπος να αποδοθούν τα παραπάνω είναι μέσω κατάλληλων συναρτήσεων που ονομάζονται εσωτερικά γινόμενα.

Α. Χώροι Εσωτερικού Γινομένου (Inner Product Spaces) - Νόρμες (Norms)

Έστω V διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στο V θα ονομάζεται όποια συνάρτηση δέχεται ζεύγος στοιχείων του V και αποδίδει πραγματικό αριθμό που θεωρείται ως το "γινόμενο" τους, εφόσον ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός [Εσωτερικό Γινόμενο - Inner Product] Η $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στο V αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\forall x,y\in V$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (συμμετρία)
2. $\forall x,y,z\in V$, $\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$ (γραμμικότητα α.)
3. $\forall x,y\in V$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ (γραμμικότητα β.)
4. $\forall x\in V$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ και $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$ (θετικά ορισμένο). □

Παρατήρηση. Οι 1,2 συνεπάγονται ότι $\forall x,y,z\in V$, $\langle x,z+y\rangle = \langle z+y,x\rangle = \langle z,x\rangle + \langle y,x\rangle = \langle x,z\rangle + \langle x,y\rangle$. Οι 1,3 συνεπάγονται ότι $\forall x,y\in V$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle x,\lambda y\rangle = \langle \lambda y,x\rangle = \lambda\langle y,x\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$. Επομένως οι γραμμικότητες α. και β. ισχύουν και ως προς τα δύο ορίσματα της $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Επιπλέον είναι εμφανές ότι συνδυάζονται σε: $\forall x,y,z_1,z_2\in V$, $\langle x+z_1,y+z_2\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z_2\rangle + \langle z_1,y\rangle + \langle z_1,z_2\rangle$, $\forall x,y\in V$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\langle \lambda_1 x,\lambda_2 y\rangle = \lambda_1\lambda_2\langle x,y\rangle$, κ.ο.κ., αναδεικνύοντας έτσι ιδιότητες "ημιγραμμικότητας" του εσωτερικού γινομένου. Επιπλέον η τελευταία μας λέει ότι το εσωτερικό γινόμενο οποιουδήποτε διανύσματος με τον εαυτό του θα είναι μηδέν ανν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα του V. □

Παραδείγματα.

1. [Ευκλείδιο Εσωτερικό Γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$]. Έστω ότι $V=\mathbb{R}^n$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. Παρατηρούμε ότι $\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i=1}^n y_ix_i=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ επομένως η 1 ισχύει, ότι $\langle \mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^n(x_i+z_i)y_i = \sum_{i=1}^n(x_iy_i+x_iz_i)=\sum_{i=1}^n x_iy_i+\sum_{i=1}^n x_iz_i=\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle$, επομένως η 2 ισχύει, ότι $\langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\sum_{i=1}^n(\lambda x_i)y_i=\sum_{i=1}^n\lambda x_iy_i=\lambda\sum_{i=1}^n x_iy_i=\lambda\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, επομένως η 3 ισχύει και ότι $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i=1}^n x_i^2\geq 0$ και $\sum_{i=1}^n x_i^2=0\iff x_i=0\ \forall i=1,\dots,n\iff \mathbf{x}=\mathbf{0}_{n\times1}$. Συνεπώς αυτό είναι καλώς ορισμένο και ονομάζεται Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.
[Όταν $n=1$ τότε προκύπτει απλώς για το σύνηθες γινόμενο μεταξύ πραγματικών]. Έτσι π.χ. όταν $n=2$ και $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, έχουμε ότι $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0\cdot2+1\cdot3=3$, κ.ο.κ. □

2. (Αντιπαράδειγμα) Έστω ότι $V=\mathbb{R}^n$, $n\geq2$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1$. Επειδή $n\geq2$, παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν μπορεί να είναι εσωτερικό γινόμενο αφού π.χ. όταν $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ τότε $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0\cdot0=0$ αλλά $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_{n\times1}$ επομένως η 4 δεν ικανοποιείται (οι υπόλοιπες ικανοποιούνται;).

3. Έστω $V=\mathbb{R}^n$ και $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle := 1\cdot x_1y_1+2\cdot x_2y_2+\dots+n\,x_ny_n=\sum_{i=1}^n i\,x_iy_i$. (Δείξτε ότι αυτή ικανοποιεί τις 1-4 και επομένως προκύπτει για εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$).

Τα παραδείγματα 1 και 3 μας δείχνουν ότι στον ίδιο V είναι δυνατόν να μπορούν να οριστούν πάνω από ένα εσωτερικά γινόμενα. Επομένως προκύπτει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός. Το ζεύγος $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου (inner product space). □

Όπως θα δούμε παρακάτω ένας χώρος εσωτερικού γινομένου έχει την κατάλληλη μαθηματική δομή προκειμένου να ορίζονται γωνίες, μήκη και αποστάσεις μεταξύ διανυσμάτων. Αυτά γενικά εξαρτώνται από το συγκεκριμένο $\langle \cdot,\cdot \rangle$ με το οποίο εφοδιάζεται ο V.

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται n-διάστατος Ευκλείδιος χώρος, ενώ ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο του παραδείγματος 3 παραπάνω είναι διαφορετικός από τον Ευκλείδιο.

Περισσότερα Παραδείγματα.

4. $V = M_{n\times m}$ και έστω η $\langle \cdot,\cdot \rangle : M_{n\times m}\times M_{n\times m} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\forall A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}$$

$$\langle A,B \rangle := x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + \ldots + x_{1m}y_{1m} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22} + \ldots + x_{2m}y_{2m} + \ldots$$
$$\ldots + x_{n1}y_{n1} + x_{n2}y_{n2} + \ldots + x_{nm}y_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}y_{ij}.$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω είναι επί της ουσίας το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{nm}$, μεταξύ των διανυσμάτων που προκύπτουν αν σταθούμε την i-οστή στήλη της A κάτω από την $i-1$-οστή, $\forall i = 2,\ldots,m$ και αναλόγως για τον πίνακα B. Αυτή η παρατήρηση είναι επί της ουσίας επαρκής για να δείξουμε ότι αυτό είναι καλώς ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $M_{n\times m}$. Ονομάζεται γινόμενο Frobenius. Π.χ. αν $n=m=2$ και

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{τότε } \langle A,B \rangle = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 = 2. \ \square$$

5. Έστω $V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο} \}$ (γιατί είναι διανυσματικός χώρος;), και $\langle \cdot,\cdot \rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\forall f,g \in V,\ \langle f,g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι καλώς ορισμένη πραγματική συνάρτηση επειδή όταν οι f,g πολυωνυμικές τότε και η fg πολυωνυμική, ενώ κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επιπλέον, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x) = \langle g,f\rangle$ οπότε η 1 ισχύει, αν $h\in V$, $\langle f+h,g\rangle = \int_0^1 (f(x)+h(x))g(x)dx = \int_0^1 [f(x)g(x)+h(x)g(x)]dx$ $= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 h(x)g(x)dx = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$, επομένως η 2 ισχύει, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\langle \lambda f,g\rangle = \int_0^1 (\lambda f(x))g(x)dx = \int_0^1 \lambda f(x)g(x)dx = \lambda\int_0^1 f(x)g(x)dx = \lambda\langle f,g\rangle$, επομένως η 3 ισχύει, και $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$, $\int_0^1 f^2(x)=0$ ισοδύναμα εξαιτίας

του ορισμού του ολοκληρώματος Riemann με το ότι η f είναι ίση με το μηδέν σε όλο το $[0,1]$ εκτός από ενδεχομένως κάποια απομονωμένα σημεία, το οποίο σημαίνει ότι επειδή η f είναι πολυωνυμική και άρα συνεχής, ότι η f είναι σε όλο το $[0,1]$ ίση με το μηδέν. Συνεπώς και η 4 ισχύει, οπότε το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι καλώς ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον συγκεκριμένο χώρο συναρτήσεων. Έτσι π.χ. αν $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x$, $g(x)=x^5$ έχουμε ότι $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (1+x)x^5dx = \int_0^1 (x^5+x^6)dx = \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 =$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{7} = \frac{13}{42}$. △

Ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζει έννοια μήκους στο V ως εξής:

Ορισμός [Νόρμα που προκύπτει από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$] Έστω $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου. Η νόρμα (ή μήκος) που ορίζεται από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$, είναι συνάρτηση $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\forall \mathbf{x}\in V,\quad \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \quad (*) .\ \square$$

Η ιδιότητα 4 του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ συνεπάγεται ότι η $\|\cdot\|$ είναι καλώς ορισμένη. Εξαιτίας της 4 του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ έχουμε ότι:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1^*)$$ (Θετικά ορισμένο της νόρμας - το $\mathbf{x}$ έχει μηδενικό μήκος ανν είναι το μηδενικό διάνυσμα).

Εξαιτίας της 3 του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ έχουμε ότι, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle} = |\lambda|\,\|x\| \quad (2^*)$$ (το βαθμωτό γινόμενο του x με το λ, πολλαπλασιάζει το μήκος του x με $|\lambda|$).

Τέλος έχουμε ότι αν $x,y \in V$ τότε εξαιτίας των 1, 2 του $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \text{(ανισότητα Cauchy-Schwarz)}$$

και επομένως $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$, και επομένως εξαιτίας της μονοτονίας της ρίζας έχουμε τελικά

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (3^*)$$ (Τριγωνική ανισότητα - triangle inequality, που γενικεύει όσα γνωρίζουμε για τα μήκη των πλευρών τριγώνου).

Παρατήρηση. Οι ιδιότητες $1^*, 2^*, 3^*$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ορισμός της $\|\cdot\|$, οπότε είναι δυνατόν να γενικεύσουμε την έννοια και σε νόρμες που δεν προκύπτουν από εσωτερικά γινόμενα (δεν θα ασχοληθούμε με κάτι τέτοιο). Το ζεύγος $(V, \|\cdot\|)$ αναφέρεται χώρος με νόρμα και προφανώς περιέχει την κατάλληλη δομή προκειμένου να αποδίδεται σε κάθε διάνυσμα του χώρου έννοια μήκους. Έτσι σε έναν $(V,\|\cdot\|)$ μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα διανύσματα που έχουν μήκος (ως προς την $\|\cdot\|$) ίσο με ένα.

Ορισμός [Κανονικά διανύσματα - Normal vectors]. Το x θα αναφέρεται κανονικό (ως προς την $\|\cdot\|$) αν $\|x\| = 1$. ◻

Προφανώς κάθε $x \in V$ μπορεί να κανονικοποιηθεί (become normalized) όταν διαιρεθεί με την νόρμα του, εφόσον $x \neq 0$, αφού τότε αν $y := \frac{1}{\|x\|}x$, τότε $\|y\| = \|\frac{1}{\|x\|}x\| \overset{2^*}{=} \left|\frac{1}{\|x\|}\right| \|x\| \overset{1^*}{=} \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$. Επομένως

το μόνο μη κανονικοποιήσιμο διάνυσμα στον V είναι το 0.

Παραδείγματα.

1. (Συνέχεια) Όταν $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ τότε

η προκύπτουσα Ευκλείδια νόρμα είναι η $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n}$ $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Έτσι π.χ. όταν $n=2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, έχουμε

ότι $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$, επομένως το $\mathbf{x}$ δεν είναι κανονικό (ως προς την Ευκλείδια νόρμα. Κανονικοποιείται ως $y = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} = \sqrt{3/2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

και όπως αναμένεται, $\|y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$. $\square$

3 (συνέχεια) Για το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ η προκύπτουσα νόρμα δίνεται από το $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{1 \cdot x_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_n \cdot x_n} = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + n x_n^2} =$ $= \left(\sum_{i=1}^{n} i\, x_i^2\right)^{1/2}$. Έτσι π.χ. $n=2$, και (όπως προηγουμένως) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, έχουμε ότι

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2} = \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + 2(1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \sqrt{1} = 1$, επομένως το

$\mathbf{x}$ είναι κανονικό ως προς την τρέχουσα νόρμα (Θυμηθείτε ότι δεν είναι ως προς την Ευκλείδια - οπότε βλέπετε ότι αυτά εξαρτώνται από την νόρμα). $\square$

4 (συνέχεια). Η νόρμα που προκύπτει από το γινόμενο Frobenius, και ονομάζεται νόρμα Frobenius είναι η

$$\|A\| = \left(x_{11}x_{11} + \ldots + x_{1m}x_{1m} + x_{21}x_{21} + \ldots + x_{2m}x_{2m} + x_{n1}x_{n1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + x_{nm}x_{nm}\right)^{1/2} = \left(x_{11}^2 + \ldots + x_{1m}^2 + x_{21}^2 + \ldots + x_{2m}^2 + x_{n1}^2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + x_{nm}^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Έτσι π.χ. όταν $n=m=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, έχουμε ότι $\|A\| = (1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)^{1/2}$ $= \sqrt{1} = 1$ επομένως η A είναι κανονική (ως προς την νόρμα Frobenius). $\square$

5 (συνέχεια) Η προκύπτουσα νόρμα δίνεται από $\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ (ονομάζεται και νόρμα L^2). Έτσι αν π.χ. $f(x) = 1 + x^2$ τότε

$$\|f\| = \left(\int_0^1 (1+x^2)\,dx\right)^{1/2} = \left(\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Προφανώς η f δεν είναι κανονική (κανονικοποιήστε την!). □

B Ορθογωνιότητα – Ορθογώνιες (Ορθοκανονικές) Βάσεις (Orthogonality- Orthogonal (Orthonormal) Bases)

Θυμηθείτε ότι στον $\mathbb{R}^2$, όπου τα διανύσματα έχουν την γεωμετρική αναπαράσταση του βέλους ως προς την αρχή των αξόνων, η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, εφόσον περιορισθεί στο $[0,\pi]$ μπορεί να εκφρασθεί ως προς το συνημίτονό της, έστω $\sigma\upsilon\nu(\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$ ως

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2}}. \quad [*]$$

Ο περιορισμός $\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \in [0,\pi]$ συνεπάγεται ότι μπορούμε να βρούμε μονοσήμαντα την $\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ από το $\sigma\upsilon\nu(\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$ και δεν δημιουργεί δυσκολία αφού αν βρίσκεται εκτός του διαστήματος μπορούμε να ασχοληθούμε με την αντίστοιχη τιμή του συμπληρώματος αυτής της γωνίας χωρίς απώλεια γενικότητας. Στο [*] αναγνωρίζουμε ότι ο αριθμητής είναι το Ευκλείδιο γινόμενο του $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$ ενώ ο παρονομαστής είναι το γινόμενο των Ευκλείδιων νορμών των $\mathbf{x}$, και $\mathbf{y}$.

Έχοντας ως αφορμή το παραπάνω μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της γωνίας μεταξύ διανυσμάτων.

Ορισμός [Γωνία - Angle]. Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$. Ως γωνία $\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \in [0,\pi]$ μεταξύ αυτών ορίζεται εκείνη που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \quad [**],$$

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που προκύπτει στον V από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$, εφόσον $\mathbf{x} \neq 0$, και $\mathbf{y} \neq 0$. □

Παρατήρηση. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι το παραπάνω είναι καλώς ορισμένο αφού εξαιτίας της θα έχουμε ότι $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \in [-1,1]$. Επίσης $\theta_{x,y}=0 \iff \langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$

ενώ $\theta_{x,y}=\pi \iff -\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$. Συνεπώς ανν $\theta_{x,y}=0$ ή π
$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι το $\{x,y\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού αν $x=\lambda y$, τότε $\langle x,y\rangle = \langle \lambda y,y\rangle = \lambda\langle y,y\rangle = \lambda\|y\|^2$, ενώ $\|x\| = \|\lambda y\| = |\lambda|\,\|y\|$ οπότε $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|\cdot$ πρόσημο(λ). Αντίστροφα αν $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$, τότε η $\lambda_1 x + \lambda_2 y = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\langle \lambda_1 x+\lambda_2 y, x\rangle = \langle \mathbf{0},x\rangle \Rightarrow \lambda_1\|x\|^2+\lambda_2\langle x,y\rangle = 0\langle x,x\rangle \Rightarrow$
$\lambda_1\|x\|^2 + \lambda_2\|x\|\,\|y\|\cdot$πρόσημο$(\langle x,y\rangle)=0$ το οποίο ικανοποιείται π.χ. για $\lambda_1=1$ και $\lambda_2 = \frac{\|x\|^2}{\|y\|\text{ πρόσημο}(\langle x,y\rangle)}$, επομένως τα x,y γραμμικά εξαρτημένα. Άρα η

ανισότητα ικανοποιείται ως ισότητα ανν τα x,y γραμμικά εξαρτημένα. □

Παρατήρηση. Όταν τουλάχιστον το ένα από τα δύο διανύσματα είναι το $\mathbf{0}$ (έστω χωρίς απώλεια γενικότητας ότι $x=\mathbf{0}$) έχουμε ότι $\langle x,y\rangle = \langle \mathbf{0},y\rangle = \langle 0y,y\rangle = 0\langle y,y\rangle = 0\|y\|^2=0$ οπότε θέτουμε ως $\text{συν}(\theta_{x,y})=0$ και αναλόγως επεκτείνουμε την παραπάνω παρατήρηση. □

Παρατήρηση. Το [**] με την πρώτη παρατήρηση μας θυμίζει τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ (κατάλληλων) τυχαίων μεταβλητών. Αυτό δεν είναι τυχαίο αφού μπορούμε να κατασκευάσουμε διανυσματικούς χώρους επί του $\mathbb{R}$ από κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές όπου η συνδιακύμανση θα αποτελεί εσωτερικό γινόμενο με προκύπτουσα νόρμα την τυπική απόκλιση. □

Παραδείγματα

Α. $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Ευκλείδιο, $x=\binom{1}{0}$, $y=\binom{2}{3}$, $\langle x,y\rangle = 2$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\sqrt{13}$ οπότε $\text{συν}(\theta_{x,y}) = 2/\sqrt{13}$. □

Β. $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ όπως στο παράδειγμα 3, $x=\binom{1}{0}$, $y=\binom{2}{3}$, $\langle x,y\rangle=2$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\sqrt{22}$ οπότε $\text{συν}(\theta_{x,y}) = 2/\sqrt{22}$. Η σύγκριση αυτού με το Α μας επιβεβαιώνει ότι η γωνία γενικά εξαρτάται (και) από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Γ. $V = M_{2\times 2}$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ Frobenius, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\langle A,B\rangle = 0$
$\|A\| = 1$, $\|B\| = \sqrt{2}$, οπότε $\cos(\theta_{A,B}) = 0/\sqrt{2} = 0$. □

Δ. $V, \langle \cdot,\cdot \rangle$ όπως στο παράδειγμα 5, $f(x) = 1$, $g(x) = x^2$, $x \in [0,1]$,
$\langle f,g \rangle = \frac{1}{3}$, $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1/3$, οπότε $\cos(\theta_{f,g}) = \frac{1/3}{1/3} = 1$. □

Εφόσον σε χώρο εσωτερικού γινομένου έχουμε την έννοια της γωνίας μπορούμε εύκολα να ορίσουμε το πότε αυτά θα είναι ορθογώνια.

Ορισμός [Ορθογωνιότητα ως προς $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - Orthogonality] Έστω $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου. Τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ θα ονομάζονται ορθογώνια μεταξύ τους (ως προς το $\langle \cdot,\cdot \rangle$) ανν $\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \pi/2 \iff \cos(\theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = 0 \iff \langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = 0$.
Αν επιπλέον τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι και κανονικά (ως προς την $\|\cdot\|$) τότε θα ονομάζονται ορθοκανονικά (orthonormal). Ειδικότερα το $V_k = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ με $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in V$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, θα ονομάζεται ορθογώνιο (ως προς το $\langle \cdot,\cdot \rangle$) ανν τα μέλη του είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλ. ανν

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,k \text{ με } i \neq j.$$

Αν επιπλέον κάθε μέλος του είναι και κανονικό (ως προς την $\|\cdot\|$) τότε το V_k ονομάζεται ορθοκανονικό σύνολο (orthonormal set). □

Παρατήρηση. Το $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{0}$ αφού $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{x}, 0\mathbf{x} \rangle = 0 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Παρατήρηση. Αν το V_k είναι ορθογώνιο μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ορθοκανονικό εφόσον δεν περιέχει το $\mathbf{0}$, διαιρώντας κάθε μέλος του με την νόρμα του, αφού αν $\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}, \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y} \rangle = 0$.

Λήμμα. Αν το V_k είναι ορθογώνιο και δεν περιέχει το $\mathbf{0}$, τότε είναι γραμμ. ανεξάρτητο.
Απόδειξη. Έστω η σχέση $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ (Α). Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο πλευρών της (Α) με το $\mathbf{x}_j \in V_k$ έχουμε

$$\langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_j \rangle \iff$$

$$\lambda_1\langle x_1,x_j\rangle+\lambda_2\langle x_2,x_j\rangle+\ldots+\lambda_j\langle x_j,x_j\rangle+\ldots+\lambda_k\langle x_k,x_j\rangle=0 \quad (\text{γιατί;}) \Rightarrow$$

$$\lambda_j\|x_j\|^2=0 \quad \left(\text{αφού } \langle x_i,x_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j \ (\text{ορθογωνιότητα})\\ \|x_j\|^2, & i=j \ (\text{ορισμός νόρμας})\end{cases}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda_j=0 \text{ αφού } x_j\neq 0 \quad (\text{γιατί;}).$$

Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω για $j=1,2,\ldots,k$ βρίσκουμε τελικά ότι η (A) ισχύει μόνο όταν $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$ οπότε και προκύπτει το ζητούμενο. □

Πόρισμα. Αν ο V n-διάστατος και το V_k ορθογώνιο και δεν περιέχει το 0, τότε $k\leq n$.

Απόδειξη. Αφού εξαιτίας του παραπάνω λήμματος το V_k είναι γραμμικά ανεξάρτητο και ο V έχει διάσταση n το V_k δεν μπορεί να έχει πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο του n. □

Επομένως στην παραπάνω περίπτωση αν το $k=n$ τότε το V_k είναι βάση και ορθογώνιο, οπότε αναφέρεται ορθογώνια βάση (orthogonal basis). Αν επιπλέον τα στοιχεία του V_k είναι και κανονικά, τότε το V_k αναφέρεται ορθοκανονική βάση (orthonormal basis). Προφανώς και βάσει προηγούμενης παρατήρησης κάθε ορθογώνια βάση μετατρέπεται εύκολα σε ορθοκανονική, διαιρώντας κάθε στοιχείο του με το μήκος του.

Παραδείγματα.

A'. $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το Ευκλείδιο, $V_k=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$, οπότε

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\rangle=1\cdot 2+(-1)\cdot 2=0 \text{ οπότε το } V_k \text{ ορθογώνιο}$$

και συνεπώς βάση του $\mathbb{R}^2$. Δεν είναι όμως ορθοκανονική βάση αφού $\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2}$, $\left\|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{8}$. Το $V_k^*=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$ που προκύπτει από κανονικοποίηση του V_k είναι ορθοκανονική βάση (δείξτε το!). □

B'. Όταν στο A' αντικαταστήσουμε το Ευκλείδιο, με το εσωτερικό γινόμενο του παραδείγματος 9, το V_k παύει να είναι ορθογώνιο αφού $\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\rangle=$

$1\cdot 2+2\cdot(-1)\cdot 2=-2\neq 0$. Παρόλα αυτά το V_k είναι γραμμικά ανεξάρτητο* αφού είναι ορθογώνιο ως προς το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο (εξηγήστε!). Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν το V_k μπορεί να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο ως προς το αρχικό $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Γ'. Στο παράδειγμα Γ οι A,B είναι ορθογώνιες ως προς το γινόμενο Frobenius. □

Δ'. Για V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ όπως στο παράδειγμα 5, $f(x)=4x^2-3x$, $g(x)=x$, οπότε
$$\langle f,g\rangle=\int_0^1(4x^2-3x)x\,dx=\int_0^1(4x^3-3x^2)dx=(x^4-x^3)\Big|_0^1=0,$$
οπότε οι f,g ορθογώνιες ως προς το $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Δεδομένης της έννοιας της ορθογωνιότητας σε χώρο εσωτερικού γινομένου προκύπτουν γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως το παρακάτω.

Λήμμα (Πυθαγόρειο Θεώρημα). Έστω $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου. Αν $x,y\in V$ με $\langle x,y\rangle=0$ τότε $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Απόδειξη.
$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0}+\langle y,y\rangle$$
$$=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2.\ □$$

Λήμμα (Ορθογωνιοποίηση). Έστω $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $v=\{x,y\}$ γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε το $v^*=\{x^*,y^*\}$ είναι ορθογώνιο ως προς το $\langle\cdot,\cdot\rangle$, όπου $y^*=y-\langle x^*,y\rangle x^*$, και $x^*=\frac{1}{\|x\|}x$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\langle x^*,y^*\rangle=\langle x^*,y-\langle x^*,y\rangle x^*\rangle=$ (γιατί;)
$$=\langle x^*,y\rangle-\langle x^*,\langle x^*,y\rangle x^*\rangle=\langle x^*,y\rangle-\langle x^*,y\rangle\langle x^*,x^*\rangle$$
$$=\langle x^*,y\rangle-\langle x^*,y\rangle\frac{1}{\|x\|^2}\langle x,x\rangle$$
$$=\langle x^*,y\rangle-\langle x^*,y\rangle\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2}=0.\ □$$

Μέσω μιας παρεμφερούς διαδικασίας μπορούμε να ορθογωνιοποιούμε

* και συνεπώς βάση του $\mathbb{R}^2$ (γιατί;).

όποιο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (και συνεπώς μπορούμε να το ορθοκανονικο-ποιούμε - γιατί;), οδηγούμενοι έτσι σε αυτό που ονομάζεται αλγόριθμος ορθογω-νιοποίησης Gram-Schmidt.

Αλγόριθμος Ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt

Έστω ότι V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο, μη κενό και πεπερασμένο. Η ακόλουθη διαδικασία θα μετατρέψει το V_n σε ορθογώνιο (ή σε ορθοκανονικό εφόσον κανονικοποιήσουμε όλα τα διανύσματα που προκύπτουν από αυτή), διατηρώντας την ανεξαρτησία (δεν θα παράγει δηλαδή το 0 σε κανένα στάδιό της), ενώ η εφαρμογή της επί της ουσίας βασίζεται στο προηγούμενο λήμμα. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Το $V_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

- Κατασκευάζουμε το $x_1^* = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$,
- Κατασκευάζουμε το $x_2^* = x_2 - \langle x_2, x_1^* \rangle x_1^*$,
- Κατασκευάζουμε το $x_2^* = \frac{1}{\|x_2^*\|} x_2^*$,
- Κατασκευάζουμε το $x_3^* = x_3 - \langle x_3, x_2^* \rangle x_2^* - \langle x_3, x_1^* \rangle x_1^*$,
- Κατασκευάζουμε το $x_3^* = \frac{1}{\|x_3^*\|} x_3^*$

⋮

- Για $1 < k \leq n$ κατασκευάζουμε το $x_k^* = x_k - \langle x_k, x_{k-1}^* \rangle x_{k-1}^* - \dots - \langle x_k, x_1^* \rangle x_1^*$
- Κατασκευάζουμε το $x_k^* = \frac{1}{\|x_k^*\|} x_k^*$

⋮

- Κατασκευάζουμε το $x_n^* = x_n - \langle x_n, x_{n-1}^* \rangle x_{n-1}^* - \dots - \langle x_n, x_1^* \rangle x_1^*$

Το $V_n^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^*\}$, είναι ορθογώνιο, ενώ αν προχωρήσουμε και στο τελευταίο βήμα:

- Κατασκευάζουμε το $x_n^* = \frac{1}{\|x_n^*\|} x_n^*$, τότε έχουμε ότι το

$V_n^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ είναι ορθοκανονικό. □

Παρατηρήσεις

1. Εφόσον δεν έχει σημασία το με ποιά σειρά εμφανίζονται τα στοιχεία του V_n μέσα στο V_n αυτό σημαίνει ότι όταν αλλάζουμε το ποια διανύσματα επιλέγουμε ως $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι δυνατόν να αλλάξει και το αποτέλεσμα, το οποίο όμως σε κάθε περίπτωση θα είναι ορθογώνιο (ή ορθοκανονικό, ανάλογα με το πως εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο. □

2. Χρησιμοποιώντας τα όσα είπαμε για την μορφή που παίρνει η ανισότητα Cauchy-Schwarz στην περίπτωση της γραμμικής εξάρτησης, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι όταν το V_n είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας θα πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα, οπότε π.χ. θα είναι αδύνατη η κατασκευή του V_n^*. □

3. Όταν $n = \dim(V)$ τότε η διαδικασία μετασχηματίζει βάση, σε ορθογώνια (ή ορθοκανονική) βάση. □

Παράδειγμα.

$V = \mathbb{R}^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Ευκλείδιο, $V_n = \left\{ \binom{2}{3}, \binom{1}{1} \right\}$. Το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο (δείξτε το!). Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt για $x_1 = \binom{2}{3}$, $x_2 = \binom{1}{1}$, έχουμε

- $x_1^* = \frac{1}{\sqrt{13}} \binom{2}{3} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$,

$- x_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5/\sqrt{13} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10/13 \\ 1 - 15/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/13 \\ -2/13 \end{pmatrix}$,

$- x_2^* = \dfrac{1}{1/\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3/13 \\ -2/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$.

Το $V_n^* = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/13 \\ -2/13 \end{pmatrix} \right\}$ είναι ορθογώνιο ενώ το $V_n^* = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \right\}$ είναι ορθοκανονικό. [Άσκηση: Σε τι θα καταλήγαμε αν είχαμε θέσει ως $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;]. □

Η δομή του $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ορίζει και έννοια απόστασης μεταξύ των στοιχείων του V, οπότε είναι δυνατόν να αποκτήσουμε και ιδιότητες σύγκλισης, συνέχειας, προσέγγισης, κ.ο.κ. σε διανυσματικούς χώρους με $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Αυτό δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα προς το παρόν.

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.