Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Γραμμικοί Συνδυασμοί (Linear Combinations)

Είδαμε τους ορισμούς του διανυσματικού χώρου και υποχώρου (επί του $\mathbb{R}$). Οι ορισμοί συνεπάγονται μαθηματική δομή στην οποία έχουν αυτοί οι χώροι στοιχεία της οποίας μπορούμε στο εξής να διερευνήσουμε. Ξεκινούμε με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού που θα μας οδηγήσει στις έννοιες της γραμμικής παραγωγής (linear span), γραμμικής ανεξαρτησίας (linear independence), που θα μας οδηγήσουν στις έννοιες της βάσης (linear basis) και της διάστασης (dimension) ενός διανυσματικού χώρου (ή υποχώρου).

Έστω λοιπόν V διανυσματικός χώρος[1] και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων (προφανώς αυτά συγκροτούν πεπερασμένο υποσύνολο του V, έστω $V_n := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V$), και $\mathbf{x} \in V$.

Ορισμός [Γραμμικός Συνδυασμός] Το $\mathbf{x}$ θα αναφέρεται γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (ή ισοδύναμα - και πιο σύντομα - του V_n) αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n . \quad \square \quad (*)$$

Το $\mathbf{x}$ λοιπόν θα αναφέρεται γραμμικός συνδυασμός του V_n αν μπορεί να προκύψει από τα στοιχεία του V_n μέσω των πράξεων με τις οποίες είναι εφοδιασμένος ο V.

Παραδείγματα:

1. $V = \mathbb{R}$, $V_n = \{1\}$, τότε αν $x \in \mathbb{R}$, $x = x \cdot 1$ επομένως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n για $\lambda = x$. $\square$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $V_n = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\kappa\\0\end{pmatrix}$ για $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε ότι $\mathbf{x} = \kappa\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ και επομένως το $\mathbf{x}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n για $\lambda = \kappa$. Αντιθέτως αν $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, και $\kappa \neq 0$, τότε επειδή $\begin{pmatrix}\kappa\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\forall \kappa \neq 0$,

1. ή υποχώρος κατάλληλου διανυσματικού χώρου.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, το y δεν μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός του V_n. □

3. $V=\mathbb{R}^2$, $V_n=\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι

$$x=\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 0 + \lambda_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 0$, επομένως

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και άρα το x αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n. Προφανώς αυτό (όπως και τα προηγούμενα) μας δείχνει ότι η έννοια έχει σχέση με την επίλυση γραμμικών συστημάτων. □

4. $V=M_{2\times 2}$, $V_n=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Έστω $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι

$$A = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \text{ οπότε } A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η A αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n. Αντιθέτως αν $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$B = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \text{ το οποίο είναι}$$

αδύνατον, και άρα το B δεν μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός του V_n. □

5. $V=\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ πολυώνυμο} \}$, $V_n = \{ 1+x,\ x^2 \}$. Έστω $f(x) = 2x^2+x+1$. Έχουμε ότι

$$f(x) = \lambda_1 (1+x) + \lambda_2 x^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1 = \lambda_1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{(ισότητα πολυωνύμων)}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right\} \text{ οπότε}$$

$$f(x) = 1(1+x) + 2x^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

και συνεπώς η f αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n. Αντιθέτως αν $g(x) = 2+3x$ έχουμε

$$g(x) = \lambda_1 (1+x) + \lambda_2 x^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\iff 2+3x = \lambda_1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\iff \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ αδύνατο.}$$

Επομένως η g δεν είναι γραμμικός συνδυασμός του V_n. □

Τα παρακάτω πορίσματα αποδεικνύονται εύκολα.

Πόρισμα 1 [Μηδενικό Διάνυσμα]. Το $\mathbf{0}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του $V_n = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$

Απόδειξη. $\mathbf{0} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \dots + 0\mathbf{x}_n$ (γιατί;), επομένως ο ορισμός ισχύει για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Πόρισμα 2 [Μηδενικό Διάνυσμα-2] Αν $V_n = \{\mathbf{0}\}$ τότε το $\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός του V_n μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε (πως;) ότι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Αφού το $\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός του V_n τότε $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{0}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Αλλά από το προηγούμενο $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Πόρισμα 3 [Υπερσύνολο]. Έστω ότι το $\mathbf{x}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n και ότι V_m πεπερασμένο υποσύνολο του V με $V_n \subseteq V_m$. Τότε το $\mathbf{x}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_m.

Απόδειξη. Έστω ότι $V_n = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, $V_m = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \mathbf{0} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + 0\mathbf{x}_{n+1} \\ &= \lambda_1^* \mathbf{x}_1 + \lambda_2^* \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n^* \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1}^* \mathbf{x}_{n+1} \end{aligned}$$

με $\lambda_1^* = \lambda_1$, $\lambda_2^* = \lambda_2, \dots, \lambda_n^* = \lambda_n$, $\lambda_{n+1} = 0$. Επομένως το $\mathbf{x}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_m. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται αναλόγως (προσπάθησε το!). □

(Γραμμική) Παραγωγή [Linear Spanning]

Ορισμός [Γραμμική Παραγωγή]. Έστω V^* υπόχωρος του V και V_n όπως προηγουμένως, δηλαδή μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V. Θα λέμε ότι το V_n παράγει (γραμμικά) (linearly spans) τον V^* αν κάθε στοιχείο του V^* αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του V_n, δηλαδή αν, $\forall \mathbf{x}\in V^*$, $\exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\dots+\lambda_n\mathbf{x}_n$$

(Οι $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ είναι δυνατόν να εξαρτώνται από το $\mathbf{x}$). □

Η έννοια της παραγωγής μας επιτρέπει να "ανάγουμε" στοιχεία των ιδιοτήτων του V^* στο απλούστερο V_n.

Παραδείγματα.

1. Δείτε το παράδειγμα 1 παραπάνω. Αν $V=V^*=\mathbb{R}$ τότε το $V_n=\{1\}$ παράγει το $\mathbb{R}$, αφού αν $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x=\lambda\cdot 1$ με $\lambda=x$. Αντιστοίχως αν $V_n=\{y\}$, όπου $y\neq 0$, τότε το V_n επίσης παράγει το $\mathbb{R}$, αφού αν $x\in\mathbb{R}$, $x=\lambda\cdot y$ με $\lambda=\frac{x}{y}\in\mathbb{R}$ (αφού $y\neq 0$). Επομένως το V^* είναι δυνατόν να παράγεται από άνω του ενός V_n. □

2. Έστω ότι το V είναι όποιος διανυσματικός χώρος και $V^*=\{\mathbf{0}\}$. Τότε αν V_n είναι αυθαίρετο, μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V, αυτό παράγει τον V^*, αφού αν $V_n=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n\}$ τότε $\mathbf{0}=0\mathbf{x}_1+0\mathbf{x}_2+\dots+0\mathbf{x}_n$ (γιατί;).

   Στο παραπάνω, αν V^* είναι αυθαίρετος υπόχωρος του V και $V_n=\{\mathbf{0}\}$ τότε το V_n παράγει το $V^* \iff V^*=\{\mathbf{0}\}$. Το $(\Leftarrow)$ δίνεται από τον προηγούμενο συλλογισμό. Για το $(\Rightarrow)$ έχουμε ότι αν το V_n παράγει το V^* και το $V^*\neq\{\emptyset\}$, τότε για $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in V^*$, $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{0}$ για $\lambda\in\mathbb{R}$. Όμως $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$, άτοπο. □

3. $V=V^*=\mathbb{R}^2$, $V_n=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Έχουμε ότι το V_n παράγει τον $\mathbb{R}^2$ αφού αν $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ τότε $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ και $\mathbf{x}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \iff$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+0\lambda_2\\0\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}\iff \left.\begin{matrix}x_1=\lambda_1\\x_2=\lambda_2\end{matrix}\right\}$$ □

4. $V = V^* = \mathbb{R}^2$, και $V_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Έχουμε ότι το V_π παράγει τον $\mathbb{R}^2$ αφού αν όπως προηγουμένως $x \in \mathbb{R}^2$ καταλήγουμε (πώς;) στο γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 &= 0\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= x_1 - 2\frac{x_2}{3} \\ \lambda_2 &= \frac{x_2}{3} \end{aligned} \;.\; \square$$

5. $V = V^* = \mathbb{R}^2$, και $V_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Και εδώ έχουμε ότι το V_π παράγει το $\mathbb{R}^2$, αφού με παρόμοιους συλλογισμούς καταλήγουμε στο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ x_2 &= 0\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ x_2 &= \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= x_1 - 2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= x_2 - 3\lambda_3 \\ \lambda_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

το οποίο παρατηρούμε ότι έχει άπειρες λύσεις όποιο και αν είναι το x. $\square$

6. $V = V^* = \mathbb{R}^2$, και $V_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Τώρα το V_π δεν παράγει τον $\mathbb{R}^2$ αφού π.χ. το $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι δυνατόν να είναι γραμμικός συνδυασμός του V_π (γιατί; - δείτε το παράδειγμα 2 στην προηγούμενη παράγραφο).

7. $V = V^* = M_{2\times 2}$, και $V_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Έχουμε ότι το V_π παράγει τον $M_{2\times 2}$ αφού αν $A \in M_{2\times 2}$ τότε $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ για $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}$ και $A = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= x_{11} \\ \lambda_2 &= x_{12} \\ \lambda_3 &= x_{21} \\ \lambda_4 &= x_{22} \end{aligned}\right\}$$

και επομένως το σχετικό σύστημα έχει (μοναδική) λύση όποια και αν είναι η A. $\square$

8. $V = V^* = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ λύση της } y'' + y' - 2y = 0 \}$, και $V_\pi = \{ e^x, e^{-2x} \}$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί (εφόσον διαβάσουμε θα το δούμε αργότερα στο μάθημα) ότι το V_π παράγει τον V. $\square$

Με αφορμή τα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Πόρισμα 4. [Υπερσύνολο]. Αν το V_n παράγει τον V^* και $V_n^* \supseteq V_n$ τότε και το V_n^* παράγει τον V^*.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 3 (με τον ίδιο τρόπο). □

Συγκρίνετε τα αμέσως προηγούμενα παραδείγματα 4 και 5 από τα οποία επίσης παρατηρούμε ότι με την μετάβαση στο υπερσύνολο είναι δυνατόν να συμβαίνει ότι για κάποιο $x \in V^*$, αυτό να αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του V_n^* με πάνω από ένα τρόπους, ενώ μπορεί να αποτελούσε γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του V_n με μοναδικό τρόπο (στο 4 είχαμε μοναδική λύση στο σχετικό σύστημα, ενώ στο 5 είχαμε άπειρες). Συνεπώς όταν προσθέτουμε διανύσματα σε σύνολο που παράγει τον V^* δεν καταστρέφουμε αυτή την ιδιότητα (αλλά είναι δυνατόν να αλλάξουμε τον τρόπο με τον οποίο ισχύει).

Το αντίθετο δεν ισχύει <u>γενικά</u>:

Αν το V_n παράγει τον V^* και $V_n^* \subset V_n$ τότε είναι δυνατόν το V_n^* να μην παράγει τον V^*. (A)

Συγκρίνετε τα αμέσως προηγούμενα παραδείγματα 4 και 6. Έτσι όταν αφαιρούμε διανύσματα από το V_n, τότε μπορεί το προκύπτον σύνολο να μην εξακολουθεί να παράγει τον V^*. Λαμβάνοντας τους παραπάνω συλλογισμούς και αφού αν το V_n παράγει τον V^*, τότε είναι δυνατόν να θεωρούμε το V_n ως "συνοπτική περιγραφή" του V^* προκύπτει το παρακάτω ερώτημα:

Δεδομένου του V^* ποιό είναι το μικρότερο πλήθος από στοιχεία που μπορεί να έχει κάποιο V_n που το παράγει; (B)

Θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα. Προς το παρόν ας εξετάσουμε μια ακόμη σχετική έννοια. Έστω τώρα ότι το V_n είναι και πάλι πεπερασμένο υποσύνολο του V. Έστω το $S_{V_n} := \{x \in V : x$ είναι γραμμικός συνδυασμός του $V_n\}$.

Το S_{V_n} λοιπόν αποτελείται από όλους τους δυνατούς γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του V_n.

Πόρισμα 5. Το S_{V_n} είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

Αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in S_{v_n}$ τότε $\exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\dots+\lambda_n\mathbf{x}_n \quad \text{και}$$

$$\mathbf{y}=\mu_1\mathbf{x}_1+\mu_2\mathbf{x}_2+\dots+\mu_n\mathbf{x}_n \quad \text{εξ ορισμού. Τότε}$$

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\lambda_1+\mu_1)\mathbf{x}_1+(\lambda_2+\mu_2)\mathbf{x}_2+\dots+(\lambda_n+\mu_n)\mathbf{x}_n$ και αφού $\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\dots,\lambda_n+\mu_n\in\mathbb{R}$ το $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός του v_n, άρα $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S_{v_n}$. Αναλόγως αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lambda\mathbf{x}=\lambda\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda\lambda_2\mathbf{x}_2+\dots+\lambda\lambda_n\mathbf{x}_n$ και συνεπώς αφού $\lambda\lambda_1,\lambda\lambda_2,\dots,\lambda\lambda_n\in\mathbb{R}$ το $\lambda\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός του v_n και άρα $\lambda\mathbf{x}\in S_{v_n}$. Το αποτέλεσμα έπεται αφού τα $\mathbf{x},\mathbf{y}$ και λ επιλέχθησαν αυθαίρετα. □

Ο S_{v_n} είναι ο μεγαλύτερος υποχώρος του V που παράγεται από το v_n, με την έννοια ότι αν και ο V^* παράγεται από το v_n τότε $V^*\subseteq S_{v_n}$. Προφανώς $v_n\subseteq S_{v_n}$ (γιατί;).

Παράδειγμα. Έστω $A\in M_{n\times m}$. Παρατηρούμε ότι η A αποτελείται από n γραμμές διάστασης $1\times m$, τις $(x_{11},x_{12},\dots,x_{1m}),(x_{21},x_{22},\dots,x_{2m}),\dots,(x_{n1},x_{n2},\dots,x_{nm})$ όπως και από m στήλες διάστασης $n\times 1$ τις $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}x_{1m}\\x_{2m}\\\vdots\\x_{nm}\end{pmatrix}$.

Όταν v_n το σύνολο που αποτελείται από τις γραμμές της A τότε το S_{v_n} ονομάζεται χώρος γραμμών της A και είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^m$. Όταν το v_m αποτελείται από τις στήλες της A τότε το S_{v_m} ονομάζεται χώρος στηλών της A και είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Π.χ. έστω $n=m=2$ και $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Τότε χώρος γραμμών $=$ χώρος στηλών $=\mathbb{R}^2$. (γιατί; Δείτε και το παράδειγμα 3 παραπάνω).

Γραμμική Ανεξαρτησία [Linear Independence]

Στις προηγούμενες δύο παραγράφους ασχοληθήκαμε με το ζήτημα του αν κάποιο διάνυσμα ή κάθε διάνυσμα σε υποχώρο του V είναι δυνατόν να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός κάποιου πεπερασμένου συνόλου από διανύσματα στο V. Στην παρούσα παράγραφο μας ενδιαφέρει το εάν υπάρχει έστω και ένα διάνυσμα στο πεπερασμένο αυτό σύνολο το οποίο να αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Όπως και προηγουμένως το V_n είναι μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του V.

Ορισμός [Γραμμική Ανεξαρτησία] Το V_n θα αναφέρεται γραμμικώς ανεξάρτητο (linearly independent) (ή ισοδύναμα τα στοιχεία του γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους) αν η σχέση

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$$

ισχύει μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Παρατήρηση. Η (*) είναι εξίσωση (ή καλύτερα γραμμικό σύστημα εξισώσεων) με αγνώστους τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Προφανώς έχει πάντοτε (γιατί;) τουλάχιστον την τετριμμένη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Η γραμμική ανεξαρτησία του V_n θα ισχύει αν η τετριμμένη είναι η μοναδική λύση του (*).

Όταν το V_n δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αναφέρεται γραμμικά εξαρτημένο (linearly dependent). Παρατηρούμε ότι αυτό θα ισχύει αν το (*) έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$, με ένα τουλάχιστον $\lambda_j^* = 0$ για κάποιο $j = 1, 2, \dots, n$. Δηλαδή

$$\mathbf{0} = \lambda_1^* \mathbf{x}_1 + \lambda_2^* \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_j^* \mathbf{x}_j + \dots + \lambda_n^* \mathbf{x}_n \overset{\lambda_j^* \neq 0}{\iff}$$

$$\mathbf{x}_j = -\frac{\lambda_1^*}{\lambda_j^*} \mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2^*}{\lambda_j^*} \mathbf{x}_2 - \dots - \frac{\lambda_n^*}{\lambda_j^*} \mathbf{x}_n .$$

Δηλαδή το V_n θα είναι γραμμικά εξαρτημένο αν έστω ένα διάνυσμα του αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Επί της ουσίας αποδείξαμε τον παρακάτω ισοδύναμο χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας.

Πόρισμα 6 [Χαρακτηρισμός Ανεξαρτησίας] Το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο ανν δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του V_n που να αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. □

Παραδείγματα.

1. Έστω ότι ο V είναι κάποιος διανυσματικός χώρος και $V_n = \{0\}$. Τότε το V_n γραμμικά εξαρτημένο αφού το $(*) \Leftrightarrow 0 = \lambda 0$ το οποίο ισχύει $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. □

2. Στο προηγούμενο παράδειγμα έστω ότι $V_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0\}$. Τότε το V_n γραμμικά εξαρτημένο αφού $(*) \Leftrightarrow 0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n 0$ και μια λύση αυτού είναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = 1$ που δεν είναι τετριμμένη. Επομένως όταν το V_n περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, είναι γραμμικά εξαρτημένο. □

3. Στο προηγούμενο παράδειγμα έστω ότι $V_n = \{x\}$ με $x \neq 0$. Τότε το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού $(*) \Leftrightarrow 0 = \lambda x \Leftrightarrow \lambda = 0$ (γιατί;). □

4. $V = \mathbb{R}^2$, $V_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Έχουμε ότι $(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\}$ επομένως το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο. (Θυμηθείτε ότι το V_n παράγει τον $\mathbb{R}^2$). □

5. $V = \mathbb{R}^2$, $V_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Έχουμε ότι $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ επομένως εξαιτίας του προηγούμενου πορίσματος το V_n είναι γραμμικά εξαρτημένο. (Και εδώ το V_n παράγει τον $\mathbb{R}^2$). □

6. $V = M_{2\times 2}$, $V_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Έχουμε ότι

$$0_{2\times 2} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{matrix} \right\},$$

συνεπώς το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. (Θυμηθείτε ότι το V_n παράγει τo $M_{2\times 2}$). □

7. $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ λύση της } y'' + y' - 2y = 0 \}$, και $V_n = \{ e^x, e^{-2x} \}$. Έχουμε ότι

$$(*) \Leftrightarrow 0 = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-2x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$ (αφού οι εν λόγω εκθετικές συναρτήσεις παίρνουν μόνο αυστηρά θετικές τιμές). Επομένως το V_n γραμμικά ανεξάρτητο. (Θυμηθείτε ότι το V_n παράγει το V) □

Και τα παραπάνω παραδείγματα είναι δυνατόν να μας βοηθήσουν να αναπτύξουμε γενικότερες ιδιότητες για την ανεξαρτησία. Π.χ. τα 2 και 5 μας λένε ότι αν το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο και σε το επαυξήσουμε με κάποιο νέο στοιχείο τότε το νέο σύνολο μπορεί να είναι γραμμικά εξαρτημένο. (Γ) Το αντίθετο δεν ισχύει όπως μας πληροφορεί το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 8. Αν το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\emptyset \neq V_n^* \subseteq V_n$ τότε και το V_n^* είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Έστω ότι $V_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $V_n^* = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ για $0 < m \leq n$. Αφού το V_n γραμμικά ανεξάρτητο

$$\mathbf{0} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m + \dots + \lambda_n x_n$$
$$\text{ανν } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \dots = \lambda_n = 0 \Longrightarrow$$
$$\mathbf{0} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$
$$\text{ανν } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0. \quad \square$$

Αναλόγως με το πόρισμα 5, το πόρισμα 8 αναδεικνύει το εξής ερώτημα:
Ποιό είναι το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να έχει το V_n ώστε να είναι γραμμικά ανεξάρτητο; (Δ)

Βάση και Διάσταση (Linear Basis and Algebraic Dimension)

Δεδομένων των ερωτημάτων (Β) και (Δ) παρατηρούμε προκύπτει το ζήτημα του αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του V το οποίο ταυτόχρονα να παράγει τον V και να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ορισμός [Βάση Διανυσματικού Χώρου - Linear Basis] Βάση του V θα είναι όποιο μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V που ταυτόχρονα παράγει το V και είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Παραδείγματα.

1. $V = \mathbb{R}^2$ και $V_n = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Τα παραδείγματα προηγουμένως επιβεβαιώνουν ότι το V_n είναι βάση του $\mathbb{R}^2$. Αναλόγως το $V_n^* = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^2$.
2. $V = \mathbb{R}$ και $V_n = \{c\}$ όπου $c \neq 0$. Τα παραδείγματα παραπάνω μας

δείχνουν ότι το v_n είναι βάση του $\mathbb{R}$.

3. $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f$ λύση της $y''+y'-2y=0\}$, και $v_n=\{e^{x}, e^{-2x}\}$. Τα παραδείγματα παραπάνω μας δείχνουν ότι το v_n είναι βάση του V.

4. $V=M_{2\times 2}$ και $v_n=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Τα παραδείγματα παραπάνω μας δείχνουν ότι το v_n είναι βάση του $M_{2\times 2}$. $\square$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι αρκετοί από τους χώρους που έχουμε δει έχουν βάσεις και μάλιστα είναι δυνατόν να έχουν και πάνω από μία. Η έννοια της βάσης ισχύει φυσικά και για υποχώρους αφού αυτοί είναι διανυσματικοί χώροι καθεαυτοί. Δεδομένου αυτού, αν $V^*=\{0\}$ παρατηρούμε ότι επειδή το $\{0\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο όπως έχουμε δει παραπάνω, ο V^* δεν μπορεί να έχει βάση εκτός αν στον παραπάνω ορισμό, το εν λόγω υποσύνολο επιτρέπεται να είναι το κενό. Επίσης, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι ένας χώρος όπως ο $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ δεν μπορεί να έχει βάση εκτός αν στον παραπάνω ορισμό το εν λόγω σύνολο επιτρέπεται να είναι απειροστοιχειο.

Αν λοιπόν στον παραπάνω ορισμό επιτρέπεται στο v_n να μπορεί να είναι το κενό ή απειροστοιχείο τότε είναι δυνατόν να αποδειχθεί το:

Θεώρημα. Κάθε διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ έχει βάση.

Η απόδειξη του παραπάνω είναι εξολοκλήρου εκτός του εύρους του μαθήματος, ενώ είναι δυνατόν να δειχθεί ότι μια γενίκευση του είναι ισοδύναμη με κάποιο αξίωμα που βρίσκεται στα θεμέλια της θεωρίας συνόλων που ονομάζεται αξίωμα της επιλογής (axiom of choice).

Έτσι ο $V^*=\{0\}$ έχει αναγκαστικά ως βάση το $\emptyset$, ενώ χώροι όπως ο $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ έχουν απειροστοιχειη βάση (με όποια τέτοια δεν θα ασχοληθούμε).

Συνοψίζοντας αν το V_n είναι βάση του V:

α. Το V_n παράγει τον V, και ταυτόχρονα

β. Το V_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Συνδυάζοντας τα α. και β. με τα Α και Γ παραπάνω είναι δυνατόν να δείξουμε ότι αναγκαστικά όποιο υποσύνολο του V_n δεν μπορεί να παράγει τον V, ενώ όποιο υπερσύνολο του V_n δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς το V_n ως βάση του V αποτελεί μια εξαιρετικά "οικονομική περιγραφή" του V, είναι ταυτόχρονα "ελάχιστο" ως προς την γραμμική παραγωγή και "μέγιστο" ως προς την γραμμική ανεξαρτησία. Θυμηθείτε από τους αντίστοιχους ορισμούς ότι η γραμμική παραγωγή σχετίζεται με την επιλυσιμότητα γραμμικών συστημάτων, τα οποία επιτρέπεται να έχουν άπειρες λύσεις, ενώ η ανεξαρτησία με ανάλογη επιλυσιμότητα όπου επιτρέπεται μοναδική λύση. Συνδυάζοντας τα παραπάνω είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι βάσεις επειδή συνδυάζουν και τα δύο έχουν ακριβώς την παρακάτω ιδιότητα:

αν το V_n βάση του V, τότε κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του V_n με μοναδικό τρόπο.

Τα παραπάνω παραδείγματα μας δείχνουν ότι ο V είναι δυνατόν να έχει πάνω από μια βάσεις.

Π.χ. I. όταν $V=\mathbb{R}$ κάθε $\{c\}$, $c\neq 0$ είναι βάση όπως είδαμε, ή

II. όταν $V=\mathbb{R}^2$ κάθε $\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}\right\}$ με $c_1, c_2 \neq 0$ είναι βάση (δείξτε το!), ή

III. όταν $V=M_{2\times 2}$ κάθε $\left\{\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}\right\}$ με

$c_1, c_2, c_3, c_4 \neq 0$ είναι βάση, οπότε σε αυτά έχουμε άπειρο πλήθος βάσεων. Παρατηρούμε όμως ότι σε κάθε περίπτωση το πλήθος των στοιχείων των βάσεων ταυτίζεται (π.χ. στην I είναι 1, στην II. είναι 2, στην III είναι 4). Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι αυτό δεν είναι τυχαίο.

Θεώρημα. Έστω V διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) και V_n, V_n^* δύο βάσεις αυτού. Το πλήθος των στοιχείων του V_n είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του V_n^*. Το κοινό πλήθος στοιχείων κάθε βάσης του V ονομάζεται (αλγεβρική) διάσταση (dimension) του V ($\dim V$). Αν ο $\dim V = +\infty$ ο V ονομάζεται απειροδιάστατος (infinite dimensional) ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πεπερασμένης διάστασης (finite dimensional). □

Απόδειξη. Εκτός του εύρους του μαθήματος. □

Παρατήρηση. Ο αριθμός $\dim V$ αποτελεί την απάντηση στα **A** και **B**.

Παραδείγματα:

$V = \{0\}$, $\dim V = 0$, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, γενικότερα $\dim \mathbb{R}^n = n$ (δείξτε το!), $\dim M_{2\times 2} = 4$, και γενικότερα $\dim M_{n\times m} = nm$ (δείξτε το!), $V^* = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ λύση της $y'' + y' - 2y = 0\}$, $\dim V^* = 2$, $V = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\dim V = +\infty$, οπότε και παρατηρούμε ότι ένας απειροδιάστατος χώρος είναι δυνατόν να έχει (και) υποχώρους πεπερασμένης διάστασης.

Τέλος έχουμε το εξής χρήσιμο για αργότερα αποτέλεσμα.

Λήμμα. Έστω V_n γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Τότε το V_n είναι βάση του SV_n.

Απόδειξη. Το V_n είναι υποσύνολο του SV_n, γραμμικά ανεξάρτητο και εξ' ορισμού παράγει το SV_n.

Έτσι π.χ. αν οι γραμμές (στήλες) φιου $A \in M_{n\times m}$ τότε αυτές αποτελούν βάση του χώρου γραμμών (στηλών) αυτής. Π.χ. οι στήλες της $O_{n\times m}$ δεν είναι βάση του $\{O_{n\times 1}\}$ (γιατί;).

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο eclass του μαθήματος.