Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Διανυσματικοί Υπόχωροι (Vector Subspaces)

Στην παράγραφο Διανυσματικοί Χώροι (ΔΧ) παρατηρήσαμε το εξής. Δεδομένου διανυσματικού χώρου V (ως προς τις δεδομένες $+,\cdot$) επί του $\mathbb{R}$, είχαμε παραδείγματα κάποιου $V^* \subseteq V$ το οποίο δείξαμε πως ήταν επίσης διανυσματικός χώρος (ως προς τις ίδιες πράξεις) επί του $\mathbb{R}$ (παραβάλετε τα παραδείγματα 2-5 ή 2-6 ή 3-7 ή 4-8). Το φαινόμενο αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον ώστε να το αναδείξουμε μέσω του παρακάτω ορισμού.

Ορισμός [Διανυσματικός Υπόχωρος]. Έστω $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και V^* μη κενό υποσύνολο του V, τέτοιο ώστε $(V^*,+,\cdot)$ να είναι επίσης διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Τότε ο V^* ονομάζεται (διανυσματικός) υπόχωρος του V. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Όπως παρατηρήσαμε στα σχετικά παραδείγματα δεδομένου του ότι η $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος (και συνεπώς τα αξιώματα 1-8 ισχύουν για το V), και το $V^* \subseteq V$, τα αξιώματα 1-8 θα ικανοποιούνται όταν οι πράξεις περιορίζονται στον V^*, εφόσον το $\mathbf{0}$ (που είναι μοναδικό) βρίσκεται στο V^*.
2. Δεδομένης της προηγούμενης παρατήρησης, η $(V^*,+,\cdot)$ θα είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, εφόσον το V^* είναι και αυτό κλειστό ως προς τις $+$ και $\cdot$ (το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται ότι το $\mathbf{0} \in V^*$ - γιατί;).

Συνεπώς οι παραπάνω παρατηρήσεις αποδεικνύουν το βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα [Χαρακτηρισμού]. Η $(V^*,+,\cdot)$ είναι υπόχωρος του $(V,+,\cdot)$ αν (αν και μόνο αν) ισχύουν τα παρακάτω:

1. αν $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V^* \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in V^*$, και
2. αν $\mathbf{x} \in V^*$ και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in V^*$. □

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ως σύμβαση, εφόσον δεν υπάρχει κίνδυνος παρερμηνείας για τις $+,\cdot$, θα αναφερόμαστε στον υπόχωρο χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό V^* αντί της τριάδας $(V^*,+,\cdot)$.

Τα όσα αναφέραμε συνεπάγονται άμεσα το εξής:

Πόρισμα. Αν ο V^* διανυσματικός υπόχωρος, τότε $\mathbf{0}\in V^*$. □

Το πόρισμα προφανώς είναι ισοδύναμο με το ότι αν $\mathbf{0}\notin V^*$ τότε το V^* δεν είναι υπόχωρος του V.

Παραδείγματα.

1. Έστω V διανυσματικός χώρος και $V\supseteq V^*=\{\mathbf{0}\}$. Αν $x,y\in V^*$ (οπότε $x=y=\mathbf{0}$) τότε $x+y\in V^*$, αφού $x+y=2\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ (γιατί;), ενώ αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lambda x=\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ (γιατί;). Επομένως ο V^* είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. (Δείτε και το παράδειγμα 5 στην παράγραφο ΔΧ). □

2. $V=\mathbb{R}^n$, $V^*=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$. Το V^* είναι διανυσματικός υπόχωρος του V (δείτε τα παραδείγματα 2 και 6 στην ΔΧ). □

3. $V=M_{n\times m}$, $V^*=\{A\in M_{n\times m} : x_{11}=x_{12}=\dots=x_{1m}=0\}$. Το V^* είναι διανυσματικός υπόχωρος του V (δείτε τα παραδείγματα 3 και 7 στην ΔΧ). □

4. $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ και $V^*=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και f είναι λύση της $y''+y'-2y=0\}$. Το V^* είναι διανυσματικός υπόχωρος του V (δείτε τα παραδείγματα 4 (με $X=\mathbb{R}$) και 8 στην ΔΧ). □

Αντιπαραδείγματα

1. $V=\mathbb{R}$ και $V^*=\mathbb{Z}$. Το V^* δεν είναι υπόχωρος* του V (δείτε το παράδειγμα 1 και το αντιπαράδειγμα στην ΔΧ). Σημειώστε ότι $\mathbf{0}\in V^*$ το οποίο είναι συμβατό με το παραπάνω πόρισμα αφού αυτό περιγράφει αναγκαία αλλά μη ικανή συνθήκη χαρακτηρισμού. □

2. $V=M_{n\times m}$, $V^*=\{A\in M_{n\times m} : x_{11}=1\}$. Το V^* δεν είναι υπόχωρος του V αφού $\mathbf{0}_{n\times m}\notin V^*$ (γιατί;). □

Η έννοια του υπόχωρου είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς είναι δυνατόν να χρησιμοποιείται για την διακρίβωση ιδιοτήτων του V, γραμμικών μετασχηματισμών

* η λέξη υπόχωρος χωρίς τον προσδιορισμό διανυσματικός χρησιμοποιείται ισοδύναμα αντί του όρου διανυσματικός υπόχωρος.

του V κ.ο.κ., όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα.

Υπόχωροι και Συνολοθεωρητικές Πράξεις

Εκ κατασκευής $\emptyset \neq V^* \subseteq V$, επομένως έχει νόημα να διακριβώσουμε* το αν η ιδιότητα του υποχώρου διατηρείται από συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ υποχώρων. Στα επόμενα οι V^*, V_1^*, V_2^* είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V. Αποδεικνύουμε τα εξής απλά πορίσματα.

Πόρισμα [Συμπλήρωμα]. Το $(V^*)'$ δεν είναι υπόχωρος του V. □

Απόδειξη. $\mathbf{0} \in V^*$ (γιατί;) $\Longrightarrow \mathbf{0} \notin (V^*)'$, επομένως το $(V^*)'$ δεν μπορεί να είναι υπόχωρος του V. □

Πόρισμα [Τομή]. Το $V_1^* \cap V_2^*$ είναι υπόχωρος του V. □

Απόδειξη. Καταρχάς $\mathbf{0} \in V_1^*$ και $\mathbf{0} \in V_2^*$ (γιατί;), επομένως $V_1^* \cap V_2^* \neq \emptyset$. Τώρα, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1^* \cap V_2^*$ τότε $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_1^*$ (αφού το V_1^* είναι υπόχωρος του V) και $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_2^*$ (αφού το V_2^* είναι υπόχωρος του V). Επομένως το $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_1^* \cap V_2^*$, και άρα η τομή είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση. Αναλόγως αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\mathbf{x} \in V_1^*$ και $\lambda\mathbf{x} \in V_2^*$, οπότε $\lambda\mathbf{x} \in V_1^* \cap V_2^*$ και συνεπώς η τομή είναι κλειστή ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Επομένως η τομή είναι υπόχωρος. □

Παρατήρηση. Το αποτέλεσμα για τις τομές είναι δυνατόν να επεκταθεί σε αυθαίρετο πλήθος υποχώρων.

Είδαμε ότι τα συμπληρώματα υποχώρων, δεν είναι ποτέ υπόχωροι, ενώ οι τομές υποχώρων είναι πάντοτε υπόχωροι. Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει ότι οι ενώσεις υποχώρων δεν είναι γενικά υπόχωροι.

Παράδειγμα. Έστω $V = \mathbb{R}^2$, $V_1^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$, $V_2^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$
(Άσκηση: δείξτε ότι το V_2^* είναι υπόχωρος του V.) Έχουμε ότι $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1^*$

* όχι εξαντλητικά.

και $y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in V_2^*$, επομένως $x, y \in V_1^* \cup V_2^* = \{ z \in \mathbb{R}^2 : z_1 = 0 \text{ ή } z_2 = 0\}$.
(παρατηρήστε και εδώ ότι $0_{2\times 1} \in V_1^* \cup V_2^*$). Αλλά $x+y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}0+1\\1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin V_1^* \cup V_2^*$, επομένως η συγκεκριμένη ένωση δεν είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση (παρεμπιπτόντως είναι κλειστή ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό – δείξτε το). Συνεπώς η $V_1^* \cup V_2^*$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. $\square$

Ασκήσεις

1. Για τα παρακάτω V, V^*, επιβεβαιώστε ή διαψεύστε ότι το V^* είναι υπόχωρος του V:

α. $V = \mathbb{R}^n$, $V^* = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0 \}$.

β. $V = M_{n\times n}$, $V^* = \{ A \in M_{n\times n} : x_{11} = x_{22} = \dots = x_{nn} = 0 \}$.

γ. $V = M_{n\times m}$, $V^* = \{ A \in M_{n\times m} : x_{11} \neq 0 \}$.

δ. $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$, $V^* = \{ f \in V, f \text{ πολυώνυμο} \}$.

ε. $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$, $V^* = \{ f \in V, f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \}$.

στ. $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$, $V^* = \{ f \in V, \int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R} \}$. $\square$

2. Βρείτε παράδειγμα στο οποίο αν V_1^* και V_2^* είναι υπόχωροι του V, τότε $V_1^* \cup V_2^*$ είναι υπόχωρος του V. $\square$

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Αν εντοπίσετε κάποιο λάθος παρακαλώ αναφέρετέ το στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.