Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Διανυσματικοί Χώροι (Vector Spaces)

Γραμμική άλγεβρα είναι η μελέτη των εννοιών που αφορούν στους διανυσματικούς χώρους και τους γραμμικούς μεταξύ αυτών (γραμμικοί μετασχηματισμοί) όπως και τις σχετικές γενικεύσεις αυτών.

Έχει σημαντικότατες εφαρμογές σε άλλους κλάδους των μαθηματικών όπως η ανάλυση, η θεωρία πιθανοτήτων, κ.λ.π., αλλά και σε επιστήμες όπως τα οικονομικά, όπου γραμμικές δομές συναντώνται καθεαυτές ή χρησιμεύουν ως προσεγγίσεις.

Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μία εσωτερική, μεταξύ των μελών του, και μία εξωτερική που εμπλέκει και κάποιο αλγεβρικό σώμα όπως το $\mathbb{R}$ ή το σύνολο των μιγαδικών. Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την περίπτωση που το σώμα είναι το $\mathbb{R}$, οπότε θα μελετήσουμε ιδιότητες διανυσματικών χώρων επί του $\mathbb{R}$. Προκειμένου να τους ορίσουμε μας χρειάζεται προεργασία. Στα παρακάτω με V θα συμβολίζουμε το προαναφερθέν μη κενό σύνολο, με έντονα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ στοιχεία του V, και με απλά $x, y, z, \lambda \ldots$ που ενδεχομένως θα έχουν ένα ή δύο δείκτες, πραγματικούς αριθμούς. Σημειώνουμε ότι από παράδειγμα σε παράδειγμα είναι δυνατόν να χρησιμοποιούμε άλλους συμβολισμούς για τα στοιχεία του V (δείτε π.χ. τα παραδείγματα 3,4 παρακάτω).

Ορισμός. [Εσωτερική πράξη στο V] Ως εσωτερική πράξη στο V θα αναφέρουμε όποια συνάρτηση $+ : V \times V \to V$, δηλαδή όποιοι συνάρτηση δέχεται ζεύγος στοιχείων του V και αποδίδει κάποιο στοιχείο του V. (Οπότε το V θεωρείται κλειστό ως προς την $+$. Χωρίς απώλεια γενικότητας θα αναφερόμαστε στην $+$ ως πρόσθεση).

Παράδειγμα 1. $V=\mathbb{R}$ και $+$ η συνήθης πρόσθεση.

Παράδειγμα 2. Ως n-διάστατο πραγματικό διάνυσμα στήλη ονομάζεται οποιαδήποτε διατεταγμένη σε γραμμή n-άδα πραγματικών αριθμών της μορφής $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$[1]. Δύο τέτοια διανύσματα x, y είναι ίσα ανν (αν και μόνο αν)

$$\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2\\\vdots\\x_n=y_n\end{cases}\quad(\Leftrightarrow x=y).$$

(π.χ., $n=2$, $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ και $x\neq y$ (γιατί;))

Το σύνολο αυτών των διανυσμάτων συμβολίζεται ως $\mathbb{R}^n$ $(=V)$. Ορίζουμε την παρακάτω πράξη πρόσθεσης:

αν $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x+y:=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$ και αφού

$x_i+y_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,\dots,n$ η πράξη εμπίπτει στον παραπάνω ορισμό. (π.χ. ($n=2$, $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $x+y=\begin{pmatrix}1+1\\0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$)). Η $+$ στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι απλώς <u>κατά σημείο</u> πρόσθεση μεταξύ πραγματικών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: I. Ένα από παράδειγμα "φυσικής" εμφάνισης των παραπάνω στα οικονομικά, αφορά στο όταν το x αναπαριστά διατεταγμένες ποσότητες n αγαθών, οπότε η $+$ έχει επίσης φυσική ερμηνεία (εξηγήστε!).

II. Αναλόγως μπορούν να οριστούν τα παραπάνω για τα διανύσματα γραμμές, δηλ. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (εξηγήστε!). Στα παρακάτω και χωρίς απώλεια γενικότητας όταν αναφερόμαστε στο $\mathbb{R}^n$ θα αναφερόμαστε σε στήλες μέχρις ότου χρειαστεί να διακρίνουμε μεταξύ γραμμών και στηλών.

III. Όταν $n=1$ επιστρέφουμε στο παράδειγμα 1.

Παράδειγμα 3. Ως πραγματική μήτρα διάστασης $n\times m$ $(n,m\in\mathbb{N}^*)$ ονομάζουμε οποια διάταξη πραγματικών αριθμών σε n γραμμές και m στήλες, δηλαδή (στην περίπτωση των μητρών αντί για τα σύμβολα $x,y,z,\dots$ θα χρησιμοποιούμε τα $A,B,C,\dots$)[2]

$$A=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1m}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2m}\\\vdots&&&\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nm}\end{pmatrix}=(x_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\j=1,\dots,m}}$$

1. τα $x_1,x_2,\dots,x_n$ ονομάζονται συνιστώσες του x).
2. οι συνιστώσες θα συμβολίζονται μέσω δύο δεικτών, δηλ. x_{ij} (γιατί;).

π.χ. $n=2$, $m=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Αναλόγως δύο μήτρες $n\times m$,

$A=(x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, $B=(y_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ θα είναι ίσες αν

$$x_{ij}=y_{ij}, \quad \forall i=1,\dots,n, \forall j=1,\dots,m$$

(π.χ. $n=2, m=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, γιατί $A\neq B$;)

(γιατί η ισότητα επιβάλλει η διάταξη των γραμμών της A να είναι ίση με την διάταξη των γραμμών της B, και, η διάταξη των στηλών της A να είναι ίση με την διάταξη των στηλών της B;).

Το σύνολο των πραγματικών μητρών διαστάσεων $n\times m$ συμβολίζεται με ($V=$) $M_{n\times m}$. (όταν $m=1$ αποκτούμε το $\mathbb{R}^n$ (στήλες), όταν $n=1$ αποκτούμε το $\mathbb{R}^m$ (γραμμές)). Ορίζουμε αναλόγως την παρακάτω πράξη πρόσθεσης στο $M_{n\times m}$,

$$A+B:=\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1m}+y_{1m} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & \cdots & x_{2m}+y_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{n1}+y_{n1} & x_{n2}+y_{n2} & \cdots & x_{nm}+y_{nm} \end{pmatrix} = (x_{ij}+y_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}.$$

Αφού $x_{ij}+y_{ij}\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,\dots,n, \forall j=1,\dots,m$ η παραπάνω πράξη είναι καλώς ορισμένη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. I. Οι μήτρες αναφέρονται και πίνακες. Όπως θα δούμε αναπαριστούν μορφισμούς μεταξύ διανυσματικών χώρων, οπότε και η πρώτη ορολογία ίσως είναι προτιμότερη.

II. Και εδώ η πράξη είναι κατά σημείο πρόσθεση μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 4. Έστω $Y\neq\emptyset$. Θυμηθείτε ότι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Y είναι όποια $f: Y\to\mathbb{R}$.[3] (π.χ. $Y=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$).

3. εδώ συμβολίζουμε με $f,g,\dots$ τα στοιχεία του V, ενώ με x μεταβλητή στο Y.

Έστω λοιπόν ότι V είναι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο X. Ορίζουμε την παρακάτω πράξη πρόσθεσης στο V:

αν $f,g : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται η $f+g$ ως

$$\forall x \in X \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x).$$

(π.χ. $X=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $g(x)=x^2$, $(f+g)(x)=e^x+x^2$). Επειδή $\forall x\in X$, $f(x)\in\mathbb{R}$, $g(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)+g(x)\in\mathbb{R}$, η παραπάνω είναι καλώς ορισμένη πράξη πρόσθεσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: I. Πως ορίζεται η ισότητα μεταξύ των στοιχείων του V;

II. Το παράδειγμα 4 γενικεύει τα 1-3 (Άσκηση: Δείξτε το – σε κάθε περίπτωση επιλέξτε κατάλληλα το X). □

Ορισμός [Εξωτερική πράξη στο V επί του $\mathbb{R}$]. Ορίζουμε ως εξωτερική πράξη στο V επί του $\mathbb{R}$ κάθε συνάρτηση της μορφής $\cdot : \mathbb{R}\times V \to V$, κάθε συνάρτηση που δέχεται πραγματικό αριθμό και στοιχείο του $\mathbb{R}$ και αποδίδει στοιχείο του V (οπότε το V θα θεωρείται κλειστό ως προς την $\cdot$, ενώ χωρίς απώλεια γενικότητας θα αναφερόμαστε στην $\cdot$ ως βαθμωτός πολλαπλασιασμός - scalar multiplication).

Παράδειγμα 1. (συνέχεια) Η $\cdot$ είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός.

Παράδειγμα 2. (συνέχεια) Αν $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

$$\lambda\cdot\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Αφού $\lambda x_i \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n$ η $\cdot$ είναι καλώς ορισμένη.

Παράδειγμα 3. (συνέχεια) Αν $A\in M_{n\times m}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

$$\lambda\cdot A := \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \cdots & \lambda x_{1m} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} & \cdots & \lambda x_{2m} \\ \vdots & & & \\ \lambda x_{n1} & \lambda x_{n2} & \cdots & \lambda x_{nm} \end{pmatrix} = (\lambda x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Αφού $\lambda x_{ij}\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,\dots,n$, $\forall j=1,\dots,m$, η $\cdot$ είναι καλώς ορισμένη.

Παράδειγμα 4 (συνέχεια) Αν $f: V \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$\lambda \cdot f$ ορίζεται ως $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$.

Αφού $\forall x \in V$, $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f(x) \in \mathbb{R}$ η $\lambda \cdot f : V \to \mathbb{R}$ και συνεπώς η $\cdot$ καλώς ορισμένη. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: I. Σε κάθε ένα από τα παραπάνω η $\cdot$ συνίσταται σε κατά σημείο συνήθη πολλαπλασιασμό μεταξύ πραγματικών.

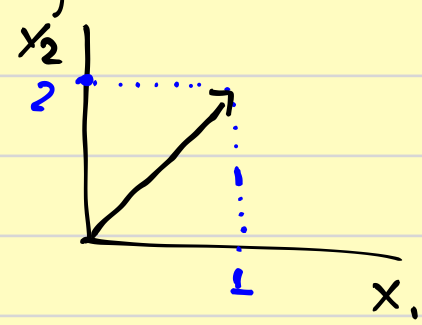
II. Ως συνήθως στα παρακάτω θα αποσιωπούμε το $\cdot$ από τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι π.χ. αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με το $\lambda \mathbf{x}$ θα εννοούμε το $\lambda \cdot \mathbf{x}$. □

Αντιπαράδειγμα. $V = \mathbb{Z}$ και με $\cdot$ συμβολίζουμε τον συνήθη πολλαπλασιασμό φυσικού με πραγματικό. Παρατηρούμε ότι η $\cdot$ δεν είναι καλώς ορισμένη αφού αν $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι δυνατόν $\lambda \mathbf{x} \notin \mathbb{Z}$ (π.χ. $\mathbf{x} = 1$, $\lambda = \sqrt{2}$).[4]

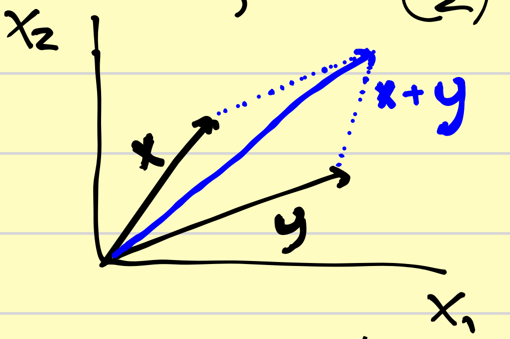
Παρέκβαση - Γεωμετρική Ερμηνεία των παραπάνω πράξεων στο $\mathbb{R}^n$.

Θυμηθείτε ότι στο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε το $\mathbf{x}$ αναπαρίσταται ως βέλος ως προς την αρχή των αξόνων και των συνιστωσών του. Π.χ.

$n = 2$, $\mathbf{x} = \binom{1}{2}$



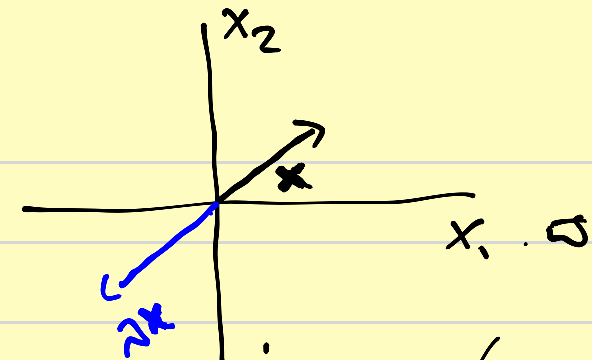
Εδώ η + αναπαρίσταται γεωμετρικά μέσω του κανόνα του παραλληλογράμμου, π.χ. $n=2$, $\mathbf{x} = \binom{1}{2}$, $\mathbf{y} = \binom{2}{1}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \binom{3}{3}$



ενώ ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός μέσω της κατάλληλης μεταβολής του "μήκους" ή/και του προσανατολισμού του βέλους, π.χ.

4. Αντιθέτως η συνήθης πρόσθεση είναι καλώς ορισμένη (γιατί;)

$n=2,\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \lambda=-1,\quad \lambda\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$



◻

Συμβολισμός: Η τριάδα $(V,+,\cdot)$ θα αναπαριστά το V εφοδιασμένο με τις δύο πράξεις. ◻

Είμαστε έτοιμοι να παραθέσουμε τον βασικό μας ορισμό.

Ορισμός. [Διανυσματικός Χώρος επί του $\mathbb{R}$] Η $(V,+,\cdot)$ θα ονομάζεται διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ αν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα ως προς τις πράξεις:

1. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V,\ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (Προσεταιριστικότητα πρόσθεσης).
2. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (μεταθετικότητα πρόσθεσης).
3. $\exists \mathbf{0}\in V : \forall \mathbf{x}\in V,\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου πρόσθεσης).
4. $\forall \mathbf{x}\in V,\ \exists -\mathbf{x}\in V : \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου ως προς την πρόσθεση).
5. $\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}\in V,\ \lambda_1(\lambda_2\mathbf{x})=(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{x}$ (συμβατότητα βαθμωτού πολλαπλασιασμού με συνήθη πολλαπλασιασμό).
6. $\forall \mathbf{x}\in V,\ 1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (μοναδιαίο στοιχείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού).
7. $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\ \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ (Επιμεριστικός βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση).
8. $\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}\in V,\ (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{x}$ (Επιμεριστικός συνήθους πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$ ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό). ◻

Τα αξιώματα 1-8 μας βοηθούν ανάμεσα στα άλλα στο να επεκτείνουμε τις πράξεις σε μεγαλύτερα πλήθη του δύο από στοιχεία του V. Π.χ. το 1. μας επιτρέπει να ορίσουμε την πρόσθεση σε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από στοιχεία του V. Έτσι π.χ. αν $x,y,z \in V$ τότε $x+y+z := (x+y)+z = x+(y+z)$ [5] αφού βάσει αυτού δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις. Τα αξιώματα εφοδιάζουν την $(V,+,\cdot)$ με "οικείες" ιδιότητες, όπως αυτή που αναφέρεται στο παρακάτω πόρισμα. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης αναφέρεται μηδενικό διάνυσμα (zero vector).

Πόρισμα 1. [Μοναδικότητα του αντιθέτου]. Αν $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και $x \in V$, τότε το $-x$ μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω $x \in V$, όπως και $z \in V$ τέτοιο ώστε $x+z=0$. Τότε

$$\left.\begin{aligned} x+(-x)+z &\overset{1}{=} (x+(-x))+z \overset{5}{=} 0+z \overset{3}{=} z \\ \| \quad & \\ x+(-x)+z &\overset{2}{=} x+z+(-x) \overset{1}{=} (x+z)+(-x) = 0+(-x) \overset{3}{=} -x \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=-x. \quad \square$$

Το παραπάνω μας λέει απευθείας ότι $-(-x)=x$ (γιατί;) και ότι $-0=0$ (γιατί;) και ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό. Παρατηρούμε αν $\lambda=0$ τότε $\forall x \in V$, $\lambda x = 0$, αφού $0x = (0+0)x \overset{8}{=} 0x+0x \overset{4}{\Rightarrow} 0=0x$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ τότε $\lambda 0 = 0$, αφού $\lambda 0 \overset{3}{=} \lambda 0 + 0 \overset{8}{\Rightarrow} \lambda 0 = (\lambda 1) 0 \Rightarrow \lambda 0 = 1 0 \overset{6}{\Rightarrow} \lambda 0 = 0$. Έτσι αποκτούμε το παρακάτω, επίσης ενδεικτικό για την ομοιότητα που έχουν οι ιδιότητες των πράξεων με αυτές στους πραγματικούς αριθμούς.

Πόρισμα 2. [Μη ύπαρξη Μηδενοδιαιρέσεως] Αν $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, τότε $\lambda x = 0 \iff (\lambda=0$ ή $x=0)$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\lambda x = 0$ και $\lambda \neq 0$ και $x \neq 0$. Τότε $\lambda x = 0 \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{\lambda}(\lambda x) = 0 \overset{5}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x = 0 \Rightarrow 1x = 0 \overset{6}{\Rightarrow} x=0$, άτοπο.

($\Leftarrow$) Δείτε στην προηγούμενη παράγραφο. $\square$

5. π.χ. αν $V=\mathbb{R}^2$, $x=\binom{0}{1}$, $y=\binom{1}{1}$, $z=\binom{2}{3}$, $x+y+z = \binom{0+1+2}{1+1+3} = \binom{3}{5}$.

Παραδείγματα. Στα παραδείγματα 1-4 οι πράξεις ορίστηκαν κατά σημείο όπως σημειώθηκε παραπάνω. Σε κάθε σημείο έχουμε την συνήθη πρόσθεση μεταξύ πραγματικών ή συνήθη πολλαπλασιασμό μεταξύ πραγματικών. Στο $\mathbb{R}$ τα 1-8 γνωρίζουμε ότι ισχύουν. Βάσει αυτών των δύο παρατηρήσεων είναι εύκολο να αποδείξουμε (Προσπαθήστε το!) ότι τα 1-8 ισχύουν σε κάθε ένα από αυτά όπου το μηδενικό διάνυσμα είναι ο αριθμός 0 στην περίπτωση του πρώτου παραδείγματος, το $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} =: O_{n\times1}$

στην περίπτωση του δεύτερου παραδείγματος, η μηδενική $n\times m$ μήτρα, δηλαδή η $O_{m\times n} := \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = (0)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ στην περίπτωση του

τρίτου παραδείγματος, και η σταθερή συνάρτηση στο 0, δηλαδή η $0: V\to\mathbb{R}$, με $0(x)=0$ $\forall x\in V$ στην περίπτωση του τέταρτου παραδείγματος. Επομένως και τα τέσσερα είναι παραδείγματα διανυσματικών χώρων επί του $\mathbb{R}$.

Ορολογία. Αν ο $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ τότε τα στοιχεία του ονομάζονται διανύσματα.□

Τα παραπάνω μας λένε ότι η έννοια του διανύσματος δεν περιορίζεται σε διατεταγμένες n-άδες πραγματικών. Διανύσματα μπορεί να είναι και μήτρες, συναρτήσεις, κ.ο.κ. εφόσον οι πράξεις ορισθούν κατάλληλα.

Αντιπαράδειγμα. Η $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, αφού η $\cdot$ δεν είναι καλώς ορισμένη όπως είδαμε παραπάνω (δείτε και την υποσημείωση 5).□

Παράδειγμα 5. Έστω το $O_{n\times1}$ όπως παραπάνω. Έστω $V=\{O_{n\times1}\}$. Τότε η $(X,+,\cdot)$, όπου $+,\cdot$ όπως ορίσαμε παραπάνω στο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Αυτό επειδή $x,y\in V$ τότε $x+y = O_{n\times1}+O_{n\times1}=O_{n\times1}$ και αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lambda\cdot O_{n\times1} = \begin{pmatrix}\lambda 0\\\lambda 0\\\vdots\\\lambda 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = O_{n\times1}$ επομένως οι $+,\cdot$ είναι καλώς

ορισμένες όταν περιορίζονται στο V. Επιπλέον τα αξιώματα 1-8 ισχύουν στο V

επειδή ισχύουν στο $\mathbb{R}^n \supset V$. Γενικότερα αν $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, τότε και ο $(\{\mathbf{0}\},+,\cdot)$ είναι επίσης, όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του V και $+,\cdot$ οι αντίστοιχοι περιορισμοί των πράξεων. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι μόνο χώροι της μορφής $(\{0\},+,\cdot)$ είναι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. □

Παράδειγμα 6. Έστω $V=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$ (σύνολο των n-διάστατων πραγματικών διανυσμάτων στηλών με μηδενική πρώτη συνιστώσα), και $+,\cdot$ όπως ορίστηκαν στο $\mathbb{R}^n$ - παράδειγμα 2. Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\in V$,

ενώ αν $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\lambda 0\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}\in V$, επομένως οι $+,\cdot$ είναι καλώς ορισμένες όταν περιορίζονται στο V. Τα αξιώματα 1-8 ισχύουν αφού ισχύουν για το $\mathbb{R}^n\supset X$. Άρα η $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. □

Παράδειγμα 7. Έστω $V=\{A\in M_{n\times m} : x_{11}=x_{12}=\dots=x_{1m}=0\}$ (σύνολο των πραγματικών $n\times m$ πινάκων με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής μηδενικά), $+,\cdot$ όπως ορίστηκαν στο $M_{n\times m}$. Παρατηρούμε ότι αν $A,B\in V$ τότε

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\x_{21}&x_{22}&\dots&x_{2m}\\\vdots&&\ddots&\\x_{n1}&x_{n2}&\dots&x_{nm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\y_{21}&y_{22}&\dots&y_{2m}\\\vdots&&\ddots&\\y_{n1}&y_{n2}&\dots&y_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\x_{21}+y_{21}&x_{22}+y_{22}&\dots&x_{2m}+y_{2m}\\\vdots&&&\\x_{n1}+y_{n1}&x_{n2}+y_{n2}&\dots&x_{nm}+y_{nm}\end{pmatrix}$$

που ανήκει στο V. Ανάλογα αν $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda 0&\lambda 0&\dots&\lambda 0\\\lambda x_{21}&\lambda x_{22}&\dots&\lambda x_{2m}\\\vdots&&\ddots&\\\lambda x_{n1}&\lambda x_{n2}&\dots&\lambda x_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\\lambda x_{21}&\lambda x_{22}&\dots&\lambda x_{2m}\\\vdots&&\ddots&\\\lambda x_{n1}&\lambda x_{n2}&\dots&\lambda_{nm}\end{pmatrix}$$

που επίσης ανήκει στο V. Επομένως οι $+,\cdot$ είναι καλώς ορισμένες όταν περιορίζονται στο V. Τα αξιώματα 1-8 ισχύουν στο V αφού ισχύουν στο $M_{n\times m}\supset V$. Άρα η $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. □

Παράδειγμα 8. Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση $y''+y'-2y=0\,(*)$. Όπως θα δούμε αργότερα η (*) είναι παράδειγμα εξίσωσης δεύτερης τάξης, ομογενούς με σταθερούς συντελεστές. Έστω $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η f αποτελεί λύση της (*)$\}$ (δηλαδή το σύνολο λύσεων της (*) – θα διαπιστώσουμε αργότερα ότι είναι μη κενό), και $+,\cdot$ όπως ορίστηκαν στο παράδειγμα 4 ($X=\mathbb{R}$). Παρατηρούμε ότι αν $f,g \in V$ τότε $f+g \in V$ αφού εξαιτίας των ιδιοτήτων της παραγώγισης αν αντικαταστήσουμε την $f+g$ στην (*) έχουμε

$$
\begin{aligned}
(f+g)'' + (f+g)' - 2(f+g) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
f''+g'' + f'+g' - 2f - 2g &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
f''+f'-2f + g''+g'-2g &= 0 \quad \overset{f,g\in X}{\Longrightarrow} \\
0+0 &\equiv 0 .
\end{aligned}
$$

Αναλόγως αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda f \in V$ αφού και πάλι

$$
\begin{aligned}
(\lambda f)'' + (\lambda f)' - 2(\lambda f) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
\lambda f'' + \lambda f' - 2\lambda f &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
\lambda (f'' + f' - 2f) &= 0 \quad \overset{f\in V}{\Longrightarrow} \\
\lambda 0 &\equiv 0 .
\end{aligned}
$$

Άρα οι $+,\cdot$ είναι καλώς ορισμένες όταν περιοριστούν στο V. Τα αξιώματα L-B ισχύουν στο V αφού ισχύουν στο ευρύτερο σύνολο συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Άρα ο $(V,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. □

Σύμβαση. Στα παρακάτω για οικονομία συμβολισμών θα συμβολίζουμε τον διανυσματικό χώρο με V αντί του $(V,+,\cdot)$ όταν είναι ξεκάθαρο το ποιες είναι οι $+,\cdot$.

Σημείωση. Το τελευταίο παράδειγμα μας έδειξε ότι η αλγεβρική δομή του διανυσματικού χώρου είναι δυνατόν να υπάρχει και σε σύνολα στοιχείων που ικανοποιούν περίπλοκες σχέσεις, όπως κατάλληλες διαφορικές εξισώσεις.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι το $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R}, x \text{ ρητός}\}$ δεν είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ όταν $+, \cdot$ είναι οι συνήθεις πράξεις.

2. Προσπαθήστε να ορίσετε μια πράξη πρόσθεσης (έστω $+^*$) στο $\mathbb{R}^2$ διαφορετική από αυτή του παραδείγματος 2 τέτοια ώστε ο $(\mathbb{R}^2, +^*, \cdot)$ όπου $\cdot$ όπως στο Παράδειγμα 2 είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

3. Δείξτε ότι αν $V = \{ A \in M_{n \times m}, x_{11} = x_{12} = \dots = x_{1m} \}$, η $(V, +, \cdot)$, με $+, \cdot$ όπως στο παράδειγμα 3, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

4. Δείξτε ότι αν $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ πολυώνυμο } 2^{ου} \text{ βαθμού} \}$, η $(V, +, \cdot)$, με $+, \cdot$ όπως στο παράδειγμα 4, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Τα παραπάνω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Αν εντοπίσετε κάποιο λάθος παρακαλώ αναφέρετέ το στο steliosteach.gr ή στο e-class του μαθήματος.