<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</u>

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΝΔΟΓΕΝΟΥΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ: ΑΤΕΛΗΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΟΓΕΝΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

7.1 <u>Ενδογενής Τεχνολογική Εξέλιξη και Οικονομική Μεγέθυνση</u>

7.1.1 <u>Η Σημασία της Γνώσης και της Τεχνολογικής Προόδου.</u>

Στο Νεοκλασσικό Υπόδειγμα του Solow (1956) και των Cass-Koopmans (1965) εξετάζεται η μακροχρόνια μεγέθυνση της οικονομίας όταν υπάρχει εξωγενής τεχνολογική εξέλιξη. Σε αυτό το υπόδειγμα ο ρυθμός της τεχνολογικής προόδου θεωρήθηκε ως δεδομένος εξωγενώς, με αποτέλεσμα ο ρυθμός της μακροχρόνιας μεγέθυνσης της οικονομίας να προσδιορίζεται επίσης εξωγενώς. Μεταξύ άλλων, το συμπέρασμα δεν είναι ικανοποιητικό και δε συμβαδίζει με την οικονομική πραγματικότητα. Ακριβώς για αυτό το λόγο, αναπτύχθηκαν στη νεότερη οικονομική φιλολογία τα υποδείγματα ενδογενούς οικονομικής μεγέθυνσης, που στοχεύουν στην πληρέστερη ανάλυση και στη πιο συνεπή και ρεαλιστική ερμηνεία των μηχανισμών που χαρακτηρίζουν την οικονομική μεγέθυνση.

Στα υποδείγματα ενδογενούς ανάπτυξης που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα, τονίσαμε ότι ο μακροχρόνιος ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης θα προσδιορίζεται ενδογενώς. Ταυτόχρονα, επισημάναμε τη σημασία των αυξουσών αποδόσεων κλίμακος και της συσσώρευσης γνώσης και ανθρωπίνου κεφαλαίου. Στο υπόδειγμα του Paul M. Romer (1986), π.χ, το φυσικό κεφάλαιο θεωρείται ως «φορέας» γνώσης που ενσωματώνει την τεχνολογική πρόοδο, και είναι ακριβώς η γνώση που δημιουργεί τις εξωτερικές οικονομίες κλίμακος και που οδηγεί, κατ’επέκταση, σε διηνεκή οικονομική μεγέθυνση.

Στα δε υποδείγματα του Robert E. Lucas, Jr. (1988) δίνεται έμφαση στο ρόλο του ανθρωπίνου κεφαλαίου και της τεχνογνωσίας για τη συνεχή αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας και, συνακόλουθα, για την μακροχρόνια οικονομική μεγέθυνση. Σε ανάλογη γραμμή κινούνται επίσης και τα υποδείγματα γραμμικής τεχνολογίας.

Σε όλα αυτά τα υποδείγματα, η βασική και θεμελιώδης ιδέα και συγχρόνως επαναστατική σε σχέση με το προγενέστερο Νεοκλασσικό Υπόδειγμα, είναι ότι οι επενδύσεις σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο προάγουν την τεχνολογική πρόοδο, όπου ως τεχνολογική πρόοδος ορίζεται η παραγωγή νέας γνώσης και η εφεύρεση νέων και πιο αποδοτικών τεχνολογιών (ήτοι πιο αποδοτικών μεθόδων παραγωγής). Και ακριβώς αυτή η τεχνολογική εξέλιξη αποτελεί το βασικό μηχανισμό μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η μακροχρόνια μεγέθυνση της οικονομίας. Καθώς δε το μέγεθος των επενδύσεων που γίνονται για έρευνα και ανάπτυξη *R&D (Research and Development)*, προσδιορίζεται ενδογενώς από τις επιλογές των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων, συνεπάγεται ότι ενδογενής είναι και ο προσδιορισμός του ρυθμού της τεχνολογικής προόδου και, κατά συνέπεια, του ρυθμού μακροχρόνιας μεγέθυνσης της οικονομίας.

Αν και στα προηγηθέντα υποδείγματα αναγνωρίζεται η σημασία της τεχνολογικής προόδου, αυτό γίνεται μόνο έμμεσα. Ο ρόλος της τεχνολογικής προόδου δεν παρουσιάζεται ρητά και σαφώς, αλλά απλώς υπονοείται. Όμως η απλούστευση αυτή, ίσως κρύβει ορισμένες από τις πραγματικές πτυχές της αναπτυξιακής διαδικασίας. Ο Paul M. Romer, λοιπόν, διαγιγνώσκοντας αυτή τη θεωρητική αδυναμία και ατέλεια των προγενέστερων υποδειγμάτων, κατασκεύασε ένα υπόδειγμα ενδογενούς τεχνολογικής προόδου και ενδογενούς οικονομικής μεγέθυνσης, όπου παρουσιάζεται ρητά και εμφανώς η διαδικασία παραγωγής γνώσεως και νέων τεχνολογιών.

Το υπόδειγμα αυτό του Romer (1990) για την «*Endogenous Technological Change*», αναλύουμε παρακάτω. Σημειώνουμε ότι υποθέτουμε διακριτό χρόνο, ενώ ο Romer χρησιμοποίησε συνεχή χρόνο.

7.1.2 <u>Τέλειος ή Ατελής Ανταγωνισμός ;</u>

Μια σημαντική υπόθεση σε όλα τα υποδείγματα που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα είναι αυτή του τέλειου ανταγωνισμού. Σε όλα τα υποδείγματα, όπου η πλευρά της παραγωγής έχει έναν και μόνο κλάδο, αυτόν της παραγωγής τελικών καταναλωτικών αγαθών, έχουμε θεωρήσει ότι όλες οι επιχειρήσεις είναι λήπτες τιμών και η διάρθρωση των αγορών είναι τέλεια ανταγωνιστική. Προκειμένου δε να είναι τα υποδείγματα συμβατά με την υπόθεση του τέλειου ανταγωνισμού, αναγκαζόμαστε να υποθέσουμε ότι οι αύξουσες αποδόσεις δε γίνονται διόλου αντιληπτές από τον ιδιωτικό τομέα, ήτοι ότι είναι εξολοκλήρου εξωτερικές. Με αυτό τον τρόπο, εξωτερικός είναι εν μέρει και ο όλος μηχανισμός της τεχνολογικής προόδου.

Η πραγματικότητα, όμως, έρχεται σε αντίθεση με τις παραπάνω απλουστευτικές υποθέσεις. Ειδικότερα, είναι πρόδηλο στην οικονομική πραγματικότητα, ότι οι επιχειρήσεις εκείνες που ασχολούνται με *R&D* και με την παραγωγή νέων τεχνολογιών, αναγνωρίζουν και εκμεταλλεύονται τις οικονομίες κλίμακος που κυριαρχούν στην έρευνα και παραγωγή γνώσης. Έτσι άλλωστε εξηγείται και το μικρό πλήθος τους σε συνδυασμό με το μεγάλο μέγεθος κάθε τέτοιας επιχείρησης. Τα δε ενδιάμεσα και κεφαλαιουχικά αγαθά που ενσωματώνουν τις νέες τεχνολογίες παραγωγής τελικών καταναλωτικών αγαθών, δεν είναι τέλεια υποκατάστατες εισροές, ούτε συνεπώς ανταγωνιστικά προϊόντα. Αντίθετα, είναι μάλλον ατελώς υποκατάστατες εισροές και συνεπώς ατελώς ανταγωνιστικά προϊόντα, έτσι ώστε οι επιχειρήσεις που τα παράγουν έχουν η κάθε μία κάποια μονοπωλιακή ισχύ, την οποία αντιλαμβάνονται και αξιοποιούν πλήρως.

Κατά συνέπεια, αν και δεν είναι ιδιαίτερα παράτολμη και «ηρωική» η υπόθεση ότι οι παραγωγοί των τελικών καταναλωτικών προϊόντων είναι τέλειοι ανταγωνιστές, η υπόθεση τέλειου ανταγωνισμού είναι απορριπτέα για τις επιχειρήσεις παραγωγής νέων τεχνολογιών και προηγμένων κεφαλαιουχικών αγαθών. Ακριβώς για αυτό, ο Romer διακρίνει και ξεχωρίζει την παραγωγική διαδικασία και την αγορά των τελικών αγαθών από την παραγωγική διαδικασία και την αγορά των νέων τεχνολογιών και των προηγμένων αγαθών που τις ενσωματώνουν. Έτσι, ομιλούμε πλέον για περισσότερους από ένα κλάδους παραγωγής, ενώ στα προηγούμενα υποδείγματα υπήρχε ένας και μόνος κλάδος, αυτός της παραγωγής τελικών αγαθών. Και το πλέον σημαντικό, η διάρθρωση των αγορών των νέων τεχνολογιών και των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών προϊόντων είναι ατελώς ή μονοπωλιακά ανταγωνιστική. Η δε υπόθεση του τέλειου ανταγωνισμού διατηρείται στο υπόδειγμα του Romer (1990) μόνο για την αγορά των τελικών καταναλωτικών προϊόντων.

7.2 Το Υπόδειγμα Ενδογενούς Τεχνολογικής Εξέλιξης του Romer (1990)

7.2.1 Βασικές Υποθέσεις για τη Διάρθρωση της Παραγωγής και των Αγορών.

Στο υπόδειγμα του Romer (1990), που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, η πλευρά της παραγωγής αποτελείται από τρεις κλάδους ή τομείς, μεταξύ των οποίων υπάρχει κάθετη εξειδίκευση. Ο πρώτος τομέας, αυτός που βρίσκεται στην κορυφή της κλίμακας κάθετης εξειδίκευσης, είναι ο κλάδος παραγωγής τελικών αγαθών. Ο δεύτερος και ενδιάμεσος τομέας είναι ο κλάδος παραγωγής ενδιάμεσων διαρκών ή κεφαλαιουχικών αγαθών, ενώ ο τρίτος, αυτός που βρίσκεται στη βάση της κλίμακας κάθετης εξειδίκευσης, είναι ο κλάδος παραγωγής νέας γνώσης και νέων τεχνολογιών.

Ο τρίτος τομέας- και συνάμα πρωτογενής τομέας- είναι εξειδικευμένος στην επιστημονική και τεχνολογική έρευνα, *R&D*, και στις εφαρμογές των νέων γνώσεων. Ειδικότερα, απασχολεί κατά κύριο λόγο εξειδικευμένο επιστημονικό προσωπικό, δηλαδή ανθρώπινο κεφάλαιο, για να παράγει σχέδια τεχνολογίας παραγωγής (*blueprints*). Ακολούθως, οι επιχειρήσεις του δεύτερου –και δευτερογενούς– τομέα είναι βαριές βιομηχανίες που αγοράζουν αυτά τα σχέδια (*blueprints*) και με βάση αυτά παράγουν διαφοροποιημένα ενδιάμεσα διαρκή κεφαλαιουχικά αγαθά που ενσωματώνουν τις νέες τεχνολογίες, ενώ απασχολούν κατά κύριο λόγο φυσικό κεφάλαιο. Οι επιχειρήσεις, τέλος, του πρώτου –και τριτογενή– τομέα ενοικιάζουν (ή εναλλακτικά και ισοδύναμα αγοράζουν) τα ενδιάμεσα κεφαλαιουχικά αγαθά που παράγουν οι επιχειρήσεις του δεύτερου τομέα, ενώ παράλληλα προσλαμβάνουν και εργασία με ανθρώπινο κεφάλαιο, προκειμένου να παράγουν τα τελικά αγαθά που διατίθενται στους καταναλωτές.

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε και ποια είναι η χρήση των παραγωγικών πόρων της οικονομίας. Το ανθρώπινο κεφάλαιο αφενός χρησιμοποιείται στην *R&D*, και στην παραγωγή νέων τεχνολογιών, αφετέρου συμπληρώνει την εργασία που απασχολείται στην παραγωγή τελικών αγαθών. Το δε φυσικό κεφάλαιο της οικονομίας, που ορίζεται ως το σύνολο των παραγόμενων από το δεύτερο τομέα διαρκών ενδιάμεσων αγαθών, απασχολείται τόσο στον ίδιο το δεύτερο τομέα, όσο και στον τομέα παραγωγής τελικών αγαθών.

Τέλος, η διάρθρωση των αγορών έχει ως ακολούθως. Οι καταναλωτές και οι παραγωγοί τελικών αγαθών είναι λήπτες τιμών τόσο των αγαθών, όσο και των εισροών. Ο καθένας από τους παραγωγούς των ενδιάμεσων διαρκών αγαθών είναι θέτης τιμών για το δικό του διαφοροποιημένο προϊόν, αλλά είναι λήπτης όλων των άλλων τιμών. Ο δε παραγωγός των νέων τεχνολογιών και των *blueprints* είναι μονοπωλητής, αλλά παίρνει ως δεδομένη την αμοιβή του ανθρωπίνου κεφαλαίου που προσλαμβάνει. Κατά συνέπεια, οι αγορές των τελικών αγαθών, της εργασίας και του ανθρωπίνου κεφαλαίου είναι όλες τέλεια ανταγωνιστικές. Η αγορά, όμως, των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών αγαθών (του φυσικού κεφαλαίου) είναι ατελώς ή μονοπωλιακά ανταγωνιστική. Η δε αγορά των *blueprints* είναι αυστηρά μονοπωλιακή.

Δύο άλλες υποθέσεις που γίνονται για λόγους απλούστευσης είναι, αφενός, ότι ο πληθυσμός της οικονομίας είναι σταθερός στο χρόνο και αφετέρου, ότι το φυσικό κεφάλαιο δεν απαξιώνεται και δεν αποσβένεται. Έτσι, το πλήθος των νοικοκυριών είναι δεδομένο σε $n \in N_{++}$, ενώ ο ρυθμός φυσικής απόσβεσης είναι μηδέν. Εξάλλου, δεδομένο είναι και το πλήθος των ανταγωνιστικών επιχειρήσεων παραγωγής τελικών αγαθών σε $m \in N_{++}$.

Παρακάτω, αναλύουμε πρώτα το πρόβλημα δυναμικής επιλογής του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού και στη συνέχεια το πρόβλημα επιλογής της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης του κάθε κλάδου παραγωγής.

7.2.2 Το Οικονομικό Πρόβλημα του Νοικοκυριού

Το πρόβλημα επιλογής του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού συνίσταται στην μεγιστοποίηση της διαχρονικής του χρησιμότητας υπό τους εισοδηματικούς και άλλους περιορισμούς που αντιμετωπίζει. Ειδικότερα, το πρόβλημα δυναμικής αριστοποίησης του νοικοκυριού κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, έχει ως εξής:

$$\max_{\{c_t, i_t, h_t, H_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{7.1}$$

υπό τους περιορισμούς

$$c_t + i_t \le p_{k_t} k_t + p_{h_t} h_t + p_{H_t} H_t + d_t \qquad \forall t \ge 0 \qquad (7.2)$$

$$k_{t+1} = k_t + i_t \qquad \forall t \ge 0 \qquad (7.3)$$

$$h_t = 1 \qquad \forall t \ge 0 \qquad (7.4)$$

$$0 \le H_t \le H \qquad \forall t \ge 0 \qquad (7.5)$$

$$c_t \ge 0, \qquad i_t \ge 0, \qquad k_{t+1} \ge 0 \qquad \forall t \ge 0 \qquad (7.6)$$

$$k_0 \in \Re_{++}, \qquad H_0 \in \Re_{++}, \text{ δεδομένα} \qquad (7.7)$$

όπου:

c_t είναι η κατανάλωση του νοικοκυριού την περίοδο t

i_t είναι η επένδυση που πραγματοποιείται κατά την ίδια περίοδο,

h_t είναι ο χρόνος εργασίας που διατίθεται στην αγορά,

H_t είναι το ανθρώπινο κεφάλαιο που κατέχει το νοικοκυριό και τις υπηρεσίες του οποίου προσφέρει στην αγορά,

k_t είναι το φυσικό κεφάλαιο που κατέχει στην έναρξη της περιόδου και τις υπηρεσίες του οποίου προσφέρει στην αγορά,

$u:\Re_+ \to \Re$ είναι η στιγμιαία ή προσωρινή συνάρτηση χρησιμότητας,

$\beta \in (0,1)$ είναι ο συντελεστής διαχρονικής προτίμησης ή συντελεστής προεξόφλησης,

p_{h_t} είναι η αμοιβή της εργασίας σε όρους (τελικού προϊόντος), δηλαδή ο πραγματικός μισθός, κατά την περίοδο t,

p_{k_t} είναι η πραγματική αμοιβή σε όρους προϊόντος των υπηρεσιών του φυσικού κεφαλαίου, δηλαδή το πραγματικό επιτόκιο της περιόδου t,

p_{H_t} είναι η πραγματική αμοιβή σε όρους προϊόντος των υπηρεσιών του ανθρωπίνου κεφαλαίου, κατά την περίοδο t, και, τέλος,

d_t είναι τα συνολικά μερίσματα που εισπράττει κατά την περίοδο t το νοικοκυριό από τα κέρδη των επιχειρήσεων των τριών κλάδων παραγωγής.

Ο περιορισμός (7.2) είναι ο εισοδηματικός περιορισμός του ατόμου για την περίοδο t, όπου το δεξιό σκέλος της (7.2) είναι το πραγματικό εισόδημα του νοικοκυριού. Ο δε περιορισμός (7.3) είναι ο νόμος κίνησης του φυσικού κεφαλαίου, όπου προς απλούστευση έχουμε υποθέσει ότι ο ρυθμός φυσικής απόσβεσης και ο ρυθμός πληθυσμιακής αύξησης είναι και οι δύο μηδενικοί. Ο περιορισμός (7.4), εξάλλου, δηλώνει ότι θεσμικοί παράγοντες περιορίζουν την προσφορά εργασίας σε μία μονάδα ανά νοικοκυριό. Επιπλέον ο περιορισμός (7.5) εκφράζει την υπόθεση ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο που διαθέτει το νοικοκυριό είναι δεδομένο στο αρχικό του μέγεθος. Τέλος, ο περιορισμός (7.6) εκφράζει τους φυσικούς περιορισμούς θετικότητας των μεταβλητών ενώ ο (7.7) δηλώνει ότι οι αρχικές προικοδοτήσεις (*endowments*) σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο είναι εξωγενώς δεδομένες.

Για την προσωρινή συνάρτηση χρησιμότητας $u(.)$ υποθέτουμε ότι έχει την μορφή σταθερής διαχρονικής ελαστικότητας υποκατάστασης (ή σταθερής σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο). Είναι ειδικότερα:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \qquad \text{με} \qquad \gamma > 1 \tag{7.8}$$

Η εξειδίκευση της (7.8) διευκολύνει τον αναλυτικό χειρισμό του υποδείγματος χωρίς να βλάπτει τη γενικότητα των συμπερασμάτων του.

<u>Παρατήρηση:</u> Σημειώνουμε ότι το φυσικό κεφάλαιο που συσσωρεύει και κατέχει το νοικοκυριό, και τις υπηρεσίες του οποίου προσφέρει έναντι ενοικίου (τόκου) στην αγορά, έχει ουσιαστικά την μορφή τελικού προϊόντος. Η επένδυση i_t είναι φυσικό τελικό προϊόν που δεν καταναλώνεται κατά την περίοδο t, αλλά αποταμιεύεται και μετατρέπεται σε φυσικό κεφάλαιο διαθέσιμο στις επόμενες περιόδους. Το συγκεκριμένο φυσικό κεφάλαιο διαφέρει, όπως θα δούμε παρακάτω, από τα κεφαλαιουχικά αγαθά που παράγονται από τον ενδιάμεσο κλάδο και που χρησιμοποιούνται ως εισροή από τον κλάδο παραγωγής του τελικού προϊόντος. Η σχέση πάντως, μεταξύ αυτών και του φυσικού κεφαλαίου που συσσωρεύουν τα νοικοκυριά, όπως αναλύεται παρακάτω, δίνεται από την τεχνολογία παραγωγής των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών προϊόντων.

<u>Παρατήρηση:</u> Στο προκείμενο υπόδειγμα υποθέτουμε ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο αναφέρεται αποκλειστικά στις επιδεξιότητες και ικανότητες που διαθέτει το άτομο, οι οποίες και συνδέονται με την ποιότητα και την παραγωγικότητα της εργασίας. Το

ανθρώπινο κεφάλαιο, δεν αναφέρεται σε νέα τεχνογνωσία και νέες τεχνολογίες. Τα τελευταία αφορούν τη γνώση που ενσωματώνεται μέσω των νέων *blueprints* στα καινούργια και προηγμένα κεφαλαιουχικά προϊόντα. Υποθέτουμε επίσης, ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο του νοικοκυριού παραμένει σταθερό στο χρόνο, παραβλέποντας προς απλούστευση τη διαδικασία απόκτησης ανθρωπίνου κεφαλαίου μέσω συστηματικής εκπαίδευσης ή με μάθηση στην πράξη. Ακριβώς αυτή την υπόθεση εκφράζει ο περιορισμός (7.5). Η εναλλακτική υπόθεση ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο αυξάνεται στο χρόνο δεν είναι και τόσο αυταπόδεικτη δεδομένου του προκείμενου ορισμού του ανθρωπίνου κεφαλαίου και δεδομένου του πεπερασμένου της ζωής κάθε ατόμου. Πάντως, ακόμη και αν εισαχθεί η εναλλακτική αυτή υπόθεση, τα συμπεράσματα του υποδείγματος δεν μεταβάλλονται παρά μόνο εισάγεται ένας επιπρόσθετος μηχανισμός που γεννά μακροχρόνια οικονομική μεγέθυνση. Εν προκειμένω όμως, ενδιαφερόμαστε για έναν άλλο μηχανισμό οικονομικής ανάπτυξης, για τη διαδικασία τεχνολογικής προόδου και παραγωγής νέας γνώσης και νέων *blueprints*. Τον μηχανισμό αυτό αναλύουμε παρακάτω.

<u>Παρατήρηση:</u> Το δεδομένο ανθρώπινο κεφάλαιο που κατέχει το νοικοκυριό, δεδομένων των τεχνολογιών παραγωγής που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορεί να το διαθέσει για απασχόληση είτε στον τομέα παραγωγής τελικών αγαθών, είτε εναλλακτικά στον τομέα *R&D* και παραγωγής νέων *blueprints*. Εφόσον το νοικοκυριό είναι αδιάφορο μεταξύ των δύο εναλλακτικών απασχολήσεων, η πραγματική αμοιβή του ανθρωπίνου κεφαλαίου πρέπει να είναι κοινή και για τους δύο κλάδους. Εξάλλου, η αγορά του ανθρωπίνου κεφαλαίου είναι τέλεια ανταγωνιστική, όπου στην πλευρά της ζήτησης εμφανίζονται οι επιχειρήσεις παραγωγής τελικών αγαθών και οι επιχειρήσεις παραγωγής νέας τεχνολογίας.

<u>Παρατήρηση:</u> Ένα πρόδηλο γνώρισμα του ανθρωπίνου κεφαλαίου, όπως τούτο ορίζεται στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, είναι η αναπόσπαστη σύνδεσή του με την ποιότητα και παραγωγικότητα της εργασίας. Το ανθρώπινο κεφάλαιο που διαθέτει ένα άτομο είναι απόλυτα ενσωματωμένο στην εργασία που προσφέρει το συγκεκριμένο άτομο. Δεν είναι κάτι αυτοτελές και διακριτό ώστε να μπορεί να προσφέρεται αυτοδύναμα και ανεξάρτητα από το χρόνο εργασίας. Προσφέρεται μαζί με την εργασία, και η αμοιβή

του ενσωματώνεται και προστίθεται στην αμοιβή της εργασίας. Παρόλα αυτά, για λόγους καθαρά απλούστευσης και χωρίς απώλεια της γενικότητας, στο συγκεκριμένο υπόδειγμα θεωρούμε ότι ανθρώπινο κεφάλαιο και εργασία είναι αυτούσια και προσφέρονται ανεξάρτητα.

Μετά τις παραπάνω διευκρινήσεις, προχωρούμε στο χαρακτηρισμό της λύσης του προβλήματος δυναμικής μεγιστοποίησης του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Ειδικότερα, οι αναγκαίες συνθήκες για εσωτερική λύση στο πρόβλημα των (7.1)-(7.8) δίνουν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{u_{c\,t}}{u_{c\,t+1}} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta(1+p_{k_{t+1}}) \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.9}$$

$$h_t = 1 \quad \text{και} \quad H_t = H \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.10}$$

Η εξίσωση (7.9) είναι η γνωστή μας συνθήκη *Euler* και απαιτεί την εξίσωση του οριακού λόγου διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση με την ακαθάριστη πραγματική απόδοση $(1+p_k)$ του φυσικού κεφαλαίου. Η συνθήκη (7.10) δηλώνει απλώς ότι τα νοικοκυριά θα διαθέτουν στην αγορά το σύνολο του διαθεσίμου ανθρωπίνου κεφαλαίου τους και τον προκαθορισμένο χρόνο εργασίας.

7.2.3 Ο Κλάδος Παραγωγής του Τελικού Προϊόντος

Προχωρώντας τώρα στην ανάλυση της συμπεριφοράς των επιχειρήσεων της οικονομίας, ξεκινάμε με τον – πρώτο κατά την κατάταξη μας και τριτογενή κατά την κλίμακα εξειδίκευσης- τομέα παραγωγής των τελικών καταναλωτικών προϊόντων, δηλαδή των αγαθών που καταλήγουν στην κατανάλωση από τα νοικοκυριά. Όπως σημειώθηκε και προηγουμένως, οι επιχειρήσεις του κλάδου αυτού, οι οποίες παράγουν το τελικό προϊόν, είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Τούτο σημαίνει ότι επιλέγουν το επίπεδο παραγωγής τους και τις ποσότητες των εισροών που προσλαμβάνουν λαμβάνοντας τις τιμές του τελικού προϊόντος και των εισροών ως δεδομένες.

Η τεχνολογία παραγωγής του τελικού προϊόντος είναι γραμμικά ομογενής, ήτοι σταθερών αποδόσεων κλίμακας, ώστε να είναι συμβατή με την υπόθεση ότι οι επιχειρήσεις είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής του τελικού προϊόντος έχει την γνωστή μορφή *Cobb-Douglas*, όπου παραγωγικές εισροές είναι η εργασία, το ανθρώπινο κεφάλαιο και τα κεφαλαιουχικά αγαθά. Η μόνη ιδιαιτερότητα είναι ότι πλέον δεν υπάρχει ένας μόνο τύπος κεφαλαίου, αλλά πολλές ατελώς υποκατάστατες ποικιλίες. Το κεφάλαιο, δηλαδή, που χρησιμοποιούν οι επιχειρήσεις παραγωγής του τελικού προϊόντος, δεν συμπίπτει με το φυσικό κεφάλαιο που συσσωρεύουν τα νοικοκυριά, ούτε είναι μία απόλυτα ομοιογενής εισροή, όπως αντίθετα το έχουμε συνηθίσει στα άλλα υποδείγματα. Το κεφάλαιο των επιχειρήσεων συνίσταται εν προκειμένω σε πολλά διαφοροποιημένα κεφαλαιουχικά ή ενδιάμεσα διαρκή αγαθά. Τα ενδιάμεσα διαρκή αγαθά είναι τα προϊόντα του δεύτερου και ατελώς ανταγωνιστικού κλάδου παραγωγής, ενώ το πλήθος των ποικιλιών αυτών – όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω – προσδιορίζεται ενδογενώς στην οικονομία. Και είναι αυτός ο ενδιάμεσος κλάδος εκείνος που χρησιμοποιεί το φυσικό κεφάλαιο των νοικοκυριών ως παραγωγική εισροή.

Η συνάρτηση παραγωγής της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης του κλάδου αυτού, λοιπόν, είναι για την χρονική περίοδο t :

$$Y_t = \left(H_{Y_t}\right)^{\alpha} . \left(L_{Y_t}\right)^{b} . \int_0^{A_t} \left[x_t(z)\right]^{1-\alpha-b} dz \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.11}$$

με $\alpha \in (0,1)$, $b \in (0,1)$, $1-\alpha-b \in (0,1)$

όπου:

Y_t είναι η ποσότητα του παραγόμενου τελικού προϊόντος κατά την περίοδο t

H_{Y_t} είναι η εισροή ανθρωπίνου κεφαλαίου στην αντιπροσωπευτική επιχείρηση παραγωγής τελικού προϊόντος κατά την περίοδο t ,

L_{Y_t} είναι η αντίστοιχη εισροή εργασίας,

$x_t(z)$ είναι η εισροή σε φυσικό κεφάλαιο, ποικιλίας ή τύπου z, που χρησιμοποιεί στην περίοδο t ο αντιπροσωπευτικός παραγωγός του τελικού προϊόντος,

z δηλώνει μια ποικιλία διαφοροποιημένου κεφαλαιουχικού προϊόντος, που παράγεται από την αντίστοιχη μονοπωλιακά ανταγωνιστική επιχείρηση z του δεύτερου και δευτερογενή κλάδου της οικονομίας, με $z \in [0, A_t]$, και

A_t είναι το συνολικό πλήθος κατά την περίοδο t των ποικιλιών των διαφοροποιημένων ενδιάμεσων διαρκών προϊόντων, ή εναλλακτικά το πλήθος των αντίστοιχων επιχειρήσεων του δεύτερου κλάδου, οι οποίες και παράγουν τα προϊόντα αυτά, με $A_t > 0$.

Το ολοκλήρωμα στη συνάρτηση παραγωγής (7.11) δηλώνει ότι οι διάφορες ποικιλίες κεφαλαιουχικών προϊόντων χρησιμοποιούνται στην παραγωγική διαδικασία του τελικού προϊόντος ως υποκατάστατες εισροές.

Παρατήρηση: Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής της (7.11) γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$Y_t = H_{Y_t}^{\alpha} L_{Y_t}^{b} \int_0^{\infty} x_t(z)^{1-\alpha-b}\, dz \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.12)$$

εφόσον εισάγουμε την παρακάτω υπόθεση:

$$x_t(z) = 0 \text{ και } \mathrm{p}_{\mathrm{x}_t}(\mathrm{z}) = +\infty \text{ εάν } z > A_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.13)$$

όπου $p_{x_t}(z)$ είναι η τιμή του ενδιάμεσου προϊόντος τύπου *z* την περίοδο *t*.

Παρατήρηση: Επισημαίνουμε ότι το συνολικό πλήθος A_t των ατελώς ανταγωνιστικών επιχειρήσεων του δευτέρου κλάδου, η κάθε μία εκ των οποίων παράγει μία και μόνο μία ποικιλία διαφοροποιημένου ενδιάμεσου κεφαλαιουχικού προϊόντος, είναι δεδομένο σε κάθε χρονική στιγμή για τον ανταγωνιστικό παραγωγό του τελικού προϊόντος, αλλά προσδιορίζεται ενδογενώς για την οικονομία. Συμπίπτει δε με το πλήθος των *blueprints* (σχεδίων τεχνολογιών παραγωγής) που έχουν παραχθεί και εκχωρηθεί από τον πρωτογενή τομέα έρευνας και παραγωγής νέων τεχνολογιών, καθώς κάθε επιχείρηση του ενδιάμεσου τομέα έχει αγοράσει και χρησιμοποιεί ένα και μόνο ένα τέτοιο σχέδιο-

blueprint προκειμένου να εγκαταστήσει την αντίστοιχη διαδικασία παραγωγής. Κατά συνέπεια, σε κάθε διαφορετικό *blueprint* αντιστοιχεί μία και μόνο μία ποικιλία ενδιάμεσου διαρκούς προϊόντος, καθώς και μία και μόνο μια επιχείρηση παραγωγής αυτής της ποικιλίας. Το πλήθος δε των ποικιλιών αυτών που παράγονται από το δευτερογενή ενδιάμεσο κλάδο και που χρησιμοποιούνται από τον τριτογενή τελικό κλάδο, προσδιορίζεται ενδογενώς από τη συσσώρευση των νέων blueprints που παράγει και πωλεί σε κάθε χρονική περίοδο ο πρωτογενής τομέας έρευνας (*R&D*) και παραγωγής νέων τεχνολογιών. Επίσης υποθέτουμε εν προκειμένω ότι το A_t είναι συνεχής μεταβλητή. Η υπόθεση αυτή δεν είναι βέβαια ρεαλιστική, καθώς το πλήθος των *blueprints* και των επιχειρήσεων παραγωγής των αντίστοιχων ποικιλιών ενδιάμεσων προϊόντων είναι στην πραγματικότητα θετικός ακέραιος αριθμός. Ωστόσο, η εναλλακτική και ρεαλιστική υπόθεση ότι το A_t είναι διακριτή (ακέραια) μεταβλητή, που θα μετέτρεπε το ολοκλήρωμα της (7.11) ή (7.12) σε άθροισμα, θα καθιστούσε τον αναλυτικό χειρισμό του υποδείγματος πρακτικά αδύνατο. Έτσι, χωρίς σημαντική απόκλιση από την πραγματικότητα, υποθέτουμε ότι το A_t είναι συνεχής μεταβλητή. Ο αθροιστικός τρόπος με τον οποίο υπεισέρχονται στη συνάρτηση παραγωγής (7.11) τα διαφοροποιημένα ενδιάμεσα προϊόντα, συνεπάγεται ότι υπάρχει συμμετρία μεταξύ των διαφόρων ποικιλιών ενδιάμεσων προϊόντων ως παραγωγικών εισροών.

Αντικειμενικός στόχος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης παραγωγής του τελικού προϊόντος είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της καθ' όλο το χρονικό ορίζοντα της λειτουργίας της. Καθώς, όμως η επιχείρηση αυτή δεν κάνει καμία διαχρονικής φύσης επιλογή, το παραπάνω πρόβλημα ισοδυναμεί με την στατική μεγιστοποίηση των κερδών σε κάθε μία χρονική περίοδο. Κατά συνέπεια, και δεδομένης της (7.11), το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού παραγωγού του τελικού προϊόντος, που είναι τέλειος ανταγωνιστής και λήπτης όλων των τιμών, έχει για κάθε περίοδο *t* ως εξής:

$$\max_{Y_t, H_{Y_t}, L_{Y_t}, x_t(.)} \pi_{Y_t}$$

όπου
$$\pi_{Y_t} = Y_t - p_{H_t}.H_{Y_t} - p_{h_t} L_{Y_t} - \int_0^{A_t} p_{xt}(z) x_t(z) dz \tag{7.14}$$

$$= \int_0^{A_t} \left[H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} x_t(z)^{1-\alpha-b} - p_{xt}(z).x_t(z) \right] dz - p_{Ht} H_{Yt} - p_{ht} L_{Yt} \quad \}$$

υπό τους περιορισμούς

$$Y_t \geq 0,\ L_{Yt} \geq 0,\ x_t(z) \geq 0\ \ \forall z \in [0, A_t] \tag{7.15}$$

όπου: π_{Y_t} είναι τα πραγματικά κέρδη (σε όρους τελικού προϊόντος) του αντιπροσωπευτικού παραγωγού του τελικού προϊόντος κατά την περίοδο *t*,

$\bar{x}_t \equiv \{ x_t(z) : 0 \leq z \leq A_t \}$ είναι το σύνολο (ή εναλλακτικά το συναρτησιακό) των ποσοτήτων όλων των ποικιλιών των ενδιάμεσων προϊόντων που απασχολεί ο παραγωγός αυτός κατά την περίοδο t,

p_{h_t} είναι η πραγματική αμοιβή της εργασίας (σε όρους τελικού προϊόντος) με $0 < p_{ht}(z) < +\infty$,

p_{H_t} είναι η πραγματική αμοιβή (σε όρους τελικού προϊόντος) του ανθρωπίνου κεφαλαίου, με $0 < p_{Ht}(z) < +\infty$, και

$p_{x_t}(z)$ είναι η τιμή του ενδιάμεσου κεφαλαιουχικού προϊόντος τύπου *z* με $0 < p_{xt}(z) < +\infty\ \forall z \in [0, A_t]$.

<u>Παρατήρηση</u>: Το ολοκλήρωμα στον τελευταίο όρο της (7.14) είναι απλώς το άθροισμα του κόστους χρήσης όλων των ποικιλιών των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών προϊόντων, οπότε και ερμηνεύεται ως το συνολικό κόστος χρήσης του φυσικού κεφαλαίου που απασχολεί ο αντιπροσωπευτικός παραγωγός του τελικού προϊόντος. Επειδή η συνάρτηση παραγωγής (7.11) είναι γραμμικά ομογενής, κοίλη και αυστηρά οιονεί κοίλη, ικανοποιεί τις συνθήκες Inada και εφόσον οι αμοιβές των εισροών είναι αυστηρά θετικές και πεπερασμένες, έπεται ότι το πρόβλημα (7.14) –(7.15) θα έχει μία και μοναδική λύση που είναι και εσωτερική. Ειδικότερα, η λύση του προβλήματος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης παραγωγής του τελικού προϊόντος χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες αναγκαίες και ικανές συνθήκες πρώτης τάξης :

$$\alpha H_{Yt}^{\alpha-1} L_{Yt}^{b} \int_0^{A_t} x_t(z)^{1-\alpha-b}\, dz = p_{Ht},\ H_{Yt} > 0,\ \forall t \geq 0 \tag{7.16}$$

$$bH_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b-1} \int_0^{A_t} x_t(z)^{1-\alpha-b} dz = p_{ht},\ L_{Yt} > 0,\ \forall t \geq 0 \tag{7.17}$$

$$(1-\alpha-b) H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} x_t(z)^{-\alpha-b} = p_{xt}(z),\ x_t(z) > 0, \forall z: 0 \leq z \leq A_t,\ \forall t \geq 0 \tag{7.18}$$

Οι συνθήκες (7.16) και (7.17) εκφράζουν την εξίσωση του οριακού προϊόντος του ανθρωπίνου κεφαλαίου και της εργασίας, αντίστοιχα, με την πραγματική αμοιβή τους. Επιπλέον η συνθήκη (7.18)[1] απαιτεί την εξίσωση του οριακού προϊόντος κάθε ποικιλίας z ενδιάμεσου κεφαλαιουχικού προϊόντος με την πραγματική τιμή (*rental rate*) αυτού. Εξάλλου από τις συνθήκες (7.16)-(7.18) εξάγονται και οι συναρτήσεις ζήτησης για τις εισροές της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης παραγωγής τελικού προϊόντος. Για τα ενδιάμεσα διαρκή προϊόντα, ειδικότερα, η ατομική ζήτηση από αυτή την επιχείρηση δίνεται ως η αντίστροφη συνάρτηση της (7.18). Δεδομένου δε ότι το πλήθος των επιχειρήσεων του κλάδου παραγωγής του τελικού προϊόντος είναι $m \in N_{++}$, έπεται ότι η συνολική αγοραία ζήτηση $X_t(z)$ για την ποικιλία z ενδιάμεσου διαρκούς προϊόντος θα είναι:

$$X_t(z) = m \cdot \left[(1-\alpha-b)^{1/(\alpha+b)} H_{Yt}^{\alpha/(\alpha+b)} L_{Yt}^{b/(\alpha+b)} \right] \cdot p_{x_t}(z)^{-1/(\alpha+b)}$$

και σε αντίστροφη μορφή:

$$p_{xt}(z) = \left[(1-\alpha-b) H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} \right] m^{\alpha+b} \cdot X_t(z)^{-\alpha-b}\ \forall z: 0 \leq z \leq A_t,\ \forall t \geq 0 \tag{7.19}$$

όπου:

$$X_t(z) = m x_t(z) \tag{7.20}$$

[1] Η μαθηματική υπόθεση είναι ότι σύνολο των ενδιαμέσων προϊόντων είναι πεπερασμένο ή μετρήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι ο κάθε παραγωγός ενδιαμέσου προϊόντος δεν έχει ένα απειροελάχιστο μέγεθος και είναι αυτό που μας επιτρέπει να μεταχειριζόμαστε το ολοκλήρωμα της σχέσης (7.11) σαν άθροισμα πεπερασμένων όρων και έτσι να παίρνουμε μη μηδενική παράγωγο ως προς $x_t(z)$ για δεδομένο z.

Η (7.20) είναι ουσιαστικά η συνθήκη εκκαθάρισης στην περίοδο *t* της αγοράς του ενδιάμεσου προϊόντος τύπου z.

Παρατήρηση: Οι συνθήκες (7.16)-(7.18) συνεπάγονται ότι στο σημείο ισορροπίας τα κέρδη της επιχείρησης παραγωγής τελικού προϊόντος θα είναι σε κάθε περίοδο μηδενικά, ήτοι αντικαθιστώντας τις (7.16)-(7.18) στην (7.14) βρίσκουμε ότι $\pi_{Y_t}=0$. Το συμπέρασμα αυτό είναι απόλυτα αναμενόμενο, καθώς ο κλάδος παραγωγής του τελικού προϊόντος είναι τέλεια ανταγωνιστικός.

7.2.4 Ο Κλάδος Παραγωγής των Ενδιάμεσων Προϊόντων

Όπως τονίσαμε και νωρίτερα ο παραγωγός κάθε διαφοροποιημένης ποικιλίας ενδιάμεσου κεφαλαιουχικού προϊόντος είναι ένας οιονεί μονοπωλητής. Είναι ο μόνος που παράγει τη συγκεκριμένη ποικιλία, καθώς μόνο αυτός κατέχει το αντίστοιχο σχέδιο παραγωγής (*blueprint*) και το αποκλειστικό δικαίωμα χρήσης του (ως δικαίωμα που του έχει εκχωρηθεί έναντι αμοιβής από τον κλάδο παραγωγής των *blueprints).* Ωστόσο, ο παραγωγός αυτός έχει να ανταγωνιστεί τις άλλες ποικιλίες ενδιάμεσων διαρκών προϊόντων, που είναι στενά –αν και ατελή- υποκατάστατα με το δικό του προϊόν. Έτσι, ο κλάδος παραγωγής ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών προϊόντων είναι μονοπωλιακά ανταγωνιστικός –όχι τέλεια ανταγωνιστικός. Η δε τεχνολογία παραγωγής του ενδιάμεσου προϊόντος υποτίθεται ότι είναι γραμμική με μοναδική εισροή το φυσικό κεφάλαιο που προσφέρεται από τα νοικοκυριά (δηλ. τα νοικοκυριά διενεργούν τις επενδύσεις και είναι οι κάτοχοι του φυσικού κεφαλαίου). Ειδικότερα, η συνάρτηση παραγωγής για την ποικιλία $z\in[0,A_t]$ είναι:

$$X_t(z)=\lambda K_t(z),\ \ \lambda>0 \tag{7.21}$$

όπου: $X_t(z)$ είναι το παραγόμενο προϊόν της επιχείρησης ποικιλίας *z*,

$K_t(z)$ είναι το απασχολούμενο από την επιχείρηση αυτή φυσικό κεφάλαιο, το οποίο και ενοικιάζεται από τα νοικοκυριά, και

λ είναι ένας σταθερός και εξωγενής τεχνολογικός συντελεστής.

Από την εξίσωση (7.21) συνεπάγεται ότι η υπό συνθήκη ζήτηση για την εισροή φυσικού κεφαλαίου θα είναι:

$$K_t(z)=(1/\lambda)X_t(z) \tag{7.22}$$

Επισημαίνουμε ότι η τεχνολογία παραγωγής είναι κοινή για όλους τους τύπους ενδιάμεσων προϊόντων, επομένως η δεδομένη παράμετρος *λ* είναι η ίδια για όλα τα *z*, καθώς και σταθερή στο χρόνο.

Παρατήρηση: Τα προϊόντα του ενδιάμεσου κλάδου πρέπει να γίνουν αντιληπτά ως διαρκή κεφαλαιουχικά αγαθά. Τότε, βέβαια, τα ενδιάμεσα προϊόντα που παράγονται σε μία περίοδο είναι διαθέσιμα κατά το αναπόσβεστο τμήμα τους και στις επόμενες περιόδους. Τούτο, όμως, θα περιέπλεκε το χειρισμό του υποδείγματος. Για το λόγο αυτό, και χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα ενδιάμεσα κεφαλαιουχικά προϊόντα αποσβένονται πλήρως σε μία περίοδο. Τούτο συνεπάγεται ότι για το υπόδειγμα τα ενδιάμεσα προϊόντα δεν είναι "διαρκή", αλλά αναλώνονται πλήρως κατά την περίοδο παραγωγής τους. Αυτή η διευκρίνιση υπονοείται σε κάθε αναφορά μας στα ενδιάμεσα προϊόντα. Πάντως, εάν επιτρέψουμε τα ενδιάμεσα προϊόντα να είναι όντως διαρκή, ήτοι να αποσβένονται κατά ένα μόνο ποσοστό κάθε περίοδο, τότε θα αναμένουμε υψηλότερο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης από αυτόν που προκύπτει στο υπόδειγμά μας.

Έστω ότι *s* είναι η χρονική στιγμή όπου ο παραγωγός της ποικιλίας *z* αγοράζει το απαραίτητο *blueprint* και έστω ότι η έναρξη της λειτουργίας της επιχείρησής του γίνεται με καθυστέρηση μίας περιόδου. Η καθυστέρηση αυτή απαιτείται προκειμένου να τεθεί σε λειτουργία το αντίστοιχο σχέδιο παραγωγής. Κατά την περίοδο *s*, ο παραγωγός αυτός δαπανά –ως επένδυση- ένα ποσό p_{As} προκειμένου να αγοράσει το σχετικό *blueprint* και το αποκλειστικό δικαίωμα χρήσης του. Από τη περίοδο *s+1* και μετά, ο παραγωγός αυτής της ποικιλίας *z* εισπράττει τα καθαρά κέρδη $\Pi_{x_t}(z)$ της κάθε περιόδου. Επεται, λοιπόν, ότι τα συνολικά κέρδη $\Pi_x(z)$ του παραγωγού της ποικιλίας *z* για όλη τη ζωή της επιχείρησης θα δίνονται από την παρούσα αξία όλων των μελλοντικών κερδών μείον το κόστος αγοράς του *blueprint*, θα είναι δηλαδή:

$$\Pi_{x_s}(z) = \sum_{t=s+1}^{\infty}[R_{s,t} \cdot \pi_{x_t}(z)] - p_{A_s} \tag{7.23}$$

όπου: p_{As} είναι η δεδομένη για τον παραγωγό τιμή-κόστος κτήσης ενός *blueprint* την περίοδο *s*,

$R_{s,t}$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης στην περίοδο-βάση *s* μίας αξίας της περιόδου *t*, με $t \geq s+1$, οριζόμενος ως ακολούθως:

$$R_{s,t} = \prod_{j=s+1}^{t}(1+p_{kj})^{-1} = \frac{1}{1+p_{kt}} R_{s,t-1} \; \forall t \geq s+1, R_{s,s} \equiv 1 \tag{7.24}$$

Τα κέρδη της κάθε περιόδου δίνονται από τη διαφορά των εσόδων εκ των πωλήσεων του παραγομένου ενδιάμεσου προϊόντος μείον του τρέχοντος κόστους παραγωγής, ήτοι του κόστους απασχόλησης φυσικού κεφαλαίου:

$$\pi_{x_t}(z) = p_{x_t} X_t(z) - p_{k_t} K_t(z) \qquad \forall t \geq s+1 \tag{7.25}$$

όπου p_{k_t} είναι η δεδομένη αμοιβή (*rental rate*) του φυσικού κεφαλαίου κατά την περίοδο *t*.

Το πρόβλημα του παραγωγού του ενδιάμεσου αγαθού z, λοιπόν συνίσταται στην μεγιστοποίηση των κερδών της (7.23). Από δε τον ορισμό του z έπεται ότι για το συγκεκριμένο z στην (7.23) θα είναι $z \equiv A_s$.

Ο παραγωγός κάθε ποικιλίας ενδιάμεσου προϊόντος, λόγω της οιονεί μονοπωλιακής θέσης του, δεν παίρνει την τιμή του προϊόντος του ως δεδομένη, αλλά αντιλαμβάνεται ότι μπορεί να την καθορίσει από τον περιορισμό της αγοραίας ζήτησης για το προϊόν του. Έπεται τότε, ότι το πρόβλημα επιλογής του παραγωγού της ποικιλίας z συνίσταται στο δυναμικό πρόβλημα μεγιστοποίησης της (7.23) υπό τους ορισμούς (7.24) και (7.25), υπό τους περιορισμούς της ζητήσεως (7.19) και της τεχνολογίας (7.21) ή (7.22) και υπό τους περιορισμούς θετικότητας των μεταβλητών.

Παρατηρούμε όμως, ότι το πρόβλημα αυτό δεν διακρίνεται από καμία επιλογή διαχρονικής φύσης, καθώς δεν υπάρχει δυναμική αλληλεξάρτηση. Έπεται, τότε ότι το παραπάνω δυναμικό πρόβλημα ισοδυναμεί με τη στατική μεγιστοποίηση των κερδών κάθε μίας περιόδου ξεχωριστά, για κάθε περίοδο. Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, καταλήγουμε ότι σε κάθε περίοδο $t \geq s+1$ το πρόβλημα μεγιστοποίησης για τον παραγωγό του ενδιάμεσου προϊόντος z είναι το ακόλουθο:

$$\max_{X_t(z)\geq 0} \pi_{x_t}(z)$$

όπου

$$\pi_{x_t}(z) = p_{x_t}(z)X_t(z) - p_{kt}K_t(z)$$

$$= \left[(1-\alpha-b)\, H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} m^{\alpha+b}\right] \cdot X_t(z)^{1-\alpha-b} - \left[p_{kt}/\lambda\right] \cdot X_t(z) \qquad (7.25')$$

όπου η μεταβλητή επιλογής είναι το επίπεδο παραγωγής $X_t(z)$

Εφόσον η παραπάνω αντικειμενική συνάρτηση είναι συνεχής και αυστηρά κοίλη στο $X_t(z)$ το πρόβλημα της (7.25') θα έχει μία μοναδική και συνάμα εσωτερική λύση σε $X_t(z) > 0$ εκεί όπου ικανοποιείται η παρακάτω αναγκαία και ικανή συνθήκη:

$$\frac{d\pi_{xt}(z)}{dX_t(z)} = (1-\alpha-b)^2 H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} m^{\alpha+b} X_t(z)^{-\alpha-b} - p_{kt}\lambda^{-1} = 0$$

Από την παραπάνω συνθήκη και τη συνάρτηση ζήτησης (7.19) έπεται ότι το άριστο επίπεδο παραγωγής και η αναλογούσα τιμή της ποικιλίας z για την περίοδο t είναι αντίστοιχα:

$$X_t(z) = m\left[(1-\alpha-b)^2 \lambda\right]^{1/(\alpha+b)} \left[H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b}\right]^{1/(\alpha+b)} p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} > 0 \qquad (7.26)$$

$$p_{xt}(z) = \left[\lambda(1-\alpha-b)\right]^{-1} p_{kt} > 0, \forall z: 0 \leq z \leq A_t, \forall t \geq 0 \qquad (7.27)$$

Εξάλλου, δεδομένης της (7.20), έπεται από την (7.26) ότι η ποσότητα του ενδιάμεσου αγαθού που θα χρησιμοποιείται από κάθε επιχείρηση παραγωγής τελικού προϊόντος θα είναι:

$$x_t(z) = \left[(1-\alpha-b)^2 \lambda\right]^{1/(\alpha+b)} \left[H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{\alpha}\right]^{1/(\alpha+b)} p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} \ \forall z, \forall t \qquad (7.28)$$

Παρατήρηση : Σύμφωνα με την (7.27) η τιμή του ενδιάμεσου αγαθού είναι ένα πολλαπλάσιο (ή ποσοστό) της αμοιβής του φυσικού κεφαλαίου. Αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της γραμμικής τεχνολογίας που συνδέει το ενδιάμεσο προϊόν με το φυσικό κεφάλαιο.

Παρατήρηση: Οι εξισώσεις (7.26), (7.27) και (7.28) συνεπάγονται ότι, σε κάθε χρονική στιγμή οι τιμές και οι παραγόμενες και χρησιμοποιούμενες ποσότητες θα είναι οι ίδιες για όλες τις ποικιλίες ενδιάμεσων αγαθών. Τούτο είναι ένα απόλυτα αναμενόμενο συμπέρασμα, δεδομένης της συμμετρίας με την οποία υπεισέρχονται τα ενδιάμεσα αγαθά στην παραγωγή του τελικού προϊόντος. Κατά συνέπεια, στο σημείο ισορροπίας μπορούμε να ομιλούμε για μία αντιπροσωπευτική επιχείρηση του κλάδου παραγωγής ενδιάμεσων αγαθών ενώ όλες οι άλλες ποικιλίες είναι απόλυτα συμμετρικές.

Έστω, λοιπόν, ότι X_t, p_{xt} και x_t είναι αντίστοιχα, το κοινό μέγεθος του παραγόμενου ενδιάμεσου προϊόντος, της τιμής και της χρησιμοποιούμενης εισροής όλων των ποικιλιών. Δηλαδή, δεδομένων των (7.26), (7.27) και (7.28),

$$X_t \equiv X_t(z),\ p_{xt} \equiv p_{xt}(z),\ x_t \equiv x_t(z), \qquad \forall\, z{:}\, 0 \leq z \leq A_t\,, \forall\, t \geq 0 \qquad (7.29)$$

Ανάλογη συμμετρία θα ισχύει και για το ζητούμενο φυσικό κεφάλαιο:

$$K_t \equiv K_t(z) = (1/\lambda)X_t, \qquad \forall\, z{:}\, 0 \leq z \leq A_t\,,\ \forall\, t \geq 0 \qquad (7.30)$$

δεδομένης βέβαια της τεχνολογίας παραγωγής (7.21) ή (7.22).

Επιπλέον, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (7.26) και (7.27) στην (7.25) και δεδομένης της συμμετρίας, βρίσκουμε ότι το άριστο μέγεθος των κερδών κάθε περιόδου είναι:

$$\pi_{xt} \equiv \pi_{xt}(z) = (\alpha + b)p_{xt}X_t > 0,\ \forall z, \forall t \qquad (7.31)$$

Εάν δε στη συνέχεια αντικαταστήσουμε τη (7.31) στην (7.23), και δεδομένης της συμμετρίας, μπορούμε να υπολογίσουμε την καθαρά παρούσα αξία της επιχείρησης παραγωγής του ενδιάμεσου προϊόντος, επομένως είναι:

$$\Pi_{x_t} = \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[R_{t,s} \cdot \pi_{xs} \right] - p_{At}, \ \forall t \geq 0 \tag{7.32}$$

όπου έχουμε αντιστρέψει τα *t* και *s* σε σχέση με την (7.23) και όπου ο συντελεστής προεξόφλησης $R_{t,s}$, με βάση το χρόνο t ορίζεται αναλόγως με την (7.24).

Από την (7.32) μπορούμε να εξάγουμε και ποια θα είναι η ζήτηση από την αντιπροσωπευτική επιχείρηση παραγωγής ενδιάμεσου προϊόντος για την απόκτηση του απαραίτητου σχεδίου και δικαιώματος παραγωγής (*blueprint*). Είναι αυτονόητο ότι η επιχείρηση θα έχει καθαρά κέρδη για το σύνολο της ζωής της. Αναλυτικότερα, ο υποψήφιος παραγωγός θα αγοράσει το *blueprint* και στήσει την επιχείρηση εάν και μόνο εάν η καθαρά παρούσα αξία της επιχείρησης είναι θετική, ήτοι $\Pi_{x_t} \geq 0$. Εάν αντίθετα, τα συνολικά καθαρά κέρδη είναι αρνητικά, ήτοι $\Pi_{x_t} < 0$, η αγορά του *blueprint* για τη λειτουργία της επιχείρησης, είναι ασύμφορη επένδυση, και άρα δε θα πραγματοποιηθεί. Δεδομένης της (7.32), έπεται ότι θα υπάρχει ζήτηση για το blueprint εάν και μόνο εάν η τιμή του δεν υπερβαίνει το άθροισμα των παρούσων αξιών των μελλοντικών κερδών κάθε περιόδου.

Κατά συνέπεια, και δεδομένης της (7.32), η ζήτηση για κάθε νέα *blueprints*, κατά την περίοδο *t* θα είναι άπειρη όσο η τιμή τους είναι μικρότερη από την παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών και θα είναι άπειρα ελαστική στην οριακή περίπτωση που η τιμή τους εξισώνεται με την παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών. Κατά συνέπεια, η ζήτηση για νέα blueprints είναι:

$$p_{At} \leq \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[R_{t,s} \cdot \pi_{xs} \right] \tag{7.33}$$

Για δε τιμές υψηλότερες της ανωτέρω, η ζήτηση για *blueprints* θα μηδενίζεται. Είναι αυτονόητο, βέβαια, ότι όλες οι επιχειρήσεις του κλάδου παραγωγής ενδιάμεσων παραγόντων είναι τέλεια ανταγωνιστικοί αγοραστές στην αγορά των *blueprints*, ήτοι λαμβάνουν την τιμή απόκτησής τους ως δεδομένη.

7.2.5 Ο Κλάδος Τεχνολογικής Ερευνας (*R&D*) και Παραγωγής των Νέων Τεχνολογιών και των *Blueprints*

Η επιχείρηση που εξειδικεύεται στην επιστημονική και τεχνολογική έρευνα (*R&D*) και στην παραγωγή νέων τεχνολογιών παραγωγής και αντίστοιχων σχεδίων-*blueprints* είναι μία και μοναδική, χωρίς να αντιμετωπίζει κανένα υποκατάστατο ανταγωνιστικό προϊόν. Κατά συνέπεια, είναι απόλυτα ένας μονοπωλητής.

Εφόσον, ο παραγωγός είναι μονοπωλητής και εφόσον η αγορά έχει μια απόλυτα ανελαστική ζήτηση της μορφής της (7.33), είναι αυτονόητο ότι, προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα μονοπωλιακά κέρδη του, ο παραγωγός των *blueprints* θα επιθυμεί και θα επιλέξει την υψηλότερη δυνατή τιμή. Η άριστη τιμή ενός *blueprint* λοιπόν, θα είναι:

$$p_{At} = \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[R_{t,s} \cdot \pi_{xs} \right] \tag{7.34}$$

Η τιμή αυτή είναι τέτοια ώστε να μηδενίζει την καθαρά παρούσα αξία της κάθε επιχείρησης παραγωγής ενδιάμεσων προϊόντων, ήτοι $\Pi_{x_t} = 0$, χωρίς όμως να την κάνει αρνητική, οπότε και η λειτουργία της επιχείρησης παραμένει οριακά συμφέρουσα.

Το άλλο πρόβλημα επιλογής που έχει να λύσει ο μονοπωλητής των *blueprints* είναι το πρόβλημα, πόση έρευνα να διεξάγει και πόσα νέα σχέδια να παράγει. Σε αναπόσπαστη σύνδεση με αυτήν την επιλογή έρχεται και το ζήτημα πόσο ανθρώπινο κεφάλαιο να προσλάβει, καθώς τούτο είναι απαραίτητο ως εισροή για την διεξαγωγή της έρευνας και την παραγωγή νέων σχεδίων-*blueprints*. Ο παραγωγός των νέων τεχνολογιών, δηλαδή, προσλαμβάνει ανθρώπινο κεφάλαιο για να το χρησιμοποιήσει στην παραγωγική του διαδικασία. Εν προκειμένω δε, υποθέτουμε ότι ο παραγωγός αυτός, αν και μονοπωλητής στην αγορά των *blueprints*, είναι τέλειος ανταγωνιστής στην αγορά ανθρώπινου κεφαλαίου, καθώς στην αγορά αυτή πρέπει να ανταγωνιστεί τους παραγωγούς του τελικού προϊόντος. Τούτο σημαίνει ότι λαμβάνει την τιμή του ανθρώπινου κεφαλαίου ως δεδομένη, και προσδιοριζόμενη στην αγορά ανεξάρτητα από τον ίδιο.

Υποθέτουμε ότι η τεχνολογία παραγωγής νέας γνώσης και νέων *blueprints* είναι γραμμική ως προς το απασχολούμενο ανθρώπινο κεφάλαιο, και επίσης γραμμική ως προς την ήδη υπάρχουσα γνώση και τεχνολογία. Η συνάρτηση παραγωγής των νέων *blueprints,* ειδικότερα, είναι η ακόλουθη:

$$A_{t+1} - A_t = \mu \cdot H_{A_t} \cdot A_t \quad , \quad \mu > 0 \ , \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.35}$$

ή ισοδύναμα, ο νόμος κίνησης του A_t είναι :

$$A_{t+1} = (1 + \mu \cdot H_{At})\, A_t \quad \mu > 0 \ , \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.36}$$

όπου :

A_t είναι το συσσωρευμένο πλήθος των παραχθέντων κατά τις προηγούμενες περιόδους *blueprints* και εκφράζει τον όγκο της συσσωρευμένης γνώσης και τεχνογνωσίας κατά την περίοδο *t.*

A_{t+1}-A_t είναι το επίπεδο παραγωγής κατά την περίοδο *t* νέων *blueprints* τα οποία προπωλούνται την περίοδο *t*, αλλά θα έχουν ολοκληρωθεί την επόμενη περίοδο *t+1*, για να οδηγήσουν με υστέρηση μιας περιόδου στη δημιουργία και λειτουργία ισάριθμών νέων επιχειρήσεων παραγωγής ενδιάμεσων προϊόντων από την περίοδο *t+1* και μετά.

H_{At} είναι η ποσότητα ανθρώπινου κεφαλαίου που προσλαμβάνει και απασχολεί κατά την περίοδο *t* ο κλάδος έρευνας (*R&D*) και παραγωγής νέων τεχνολογιών, και

μ είναι μία τεχνολογική παράμετρος που εκφράζει την ταχύτητα συσσώρευσης γνώσεων και παραγωγής νέων τεχνολογιών.

Εφόσον κάθε νέο σχέδιο-*blueprint* που παράγεται την περίοδο *t* προπωλείται την ίδια περίοδο στην τιμή p_{At} και το επίπεδο παραγωγής της ίδιας περιόδου είναι A_{t+1}-A_t , ενώ η αμοιβή του ανθρώπινου κεφαλαίου είναι p_{H_t}, έπεται τα κέρδη του συγκεκριμένου παραγωγού τη χρονική περίοδο *t* είναι:

$$\pi_{At} = p_{At} \cdot (A_{t+1} - A_t) - p_{Ht} \cdot H_{At} \ , \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.37}$$

Τα δε συνολικά κέρδη για όλο το χρονικό ορίζοντα (από $t=0$ έως $t \to \infty$) θα δίνονται από το απειράθροισμα των παρουσών προεξοφλημένων αξιών των κερδών της κάθε περιόδου.

Επειδή για την επιχείρηση δεν τίθεται πρόβλημα διαχρονικής επιλογής, ο αντικειμενικός στόχος της είναι η στατική μεγιστοποίηση σε κάθε περίοδο των κερδών της (7.37) υπό τον περιορισμό ζήτησης (7.33) και τον περιορισμό της τεχνολογίας (7.35) ή (7.36), όπου μεταβλητές επιλογής είναι αφενός η τιμή πώλησης p_{At} και αφετέρου το επίπεδο παραγωγής ή η ποσότητα H_{At} ανθρώπινου κεφαλαίου που θα προσληφθεί.

Στο πρόβλημα αυτό, η λύση βέβαια μας δίνει για άριστη τιμή αυτή που προσδιορίσαμε και προηγουμένως στη σχέση (7.34). Για δε την ποσότητα ανθρώπινου κεφαλαίου, εάν αντικαταστήσουμε την (7.35) στην (7.37), έπεται ότι τα κέρδη είναι:

$$\pi_{At} = p_{At}\,(\,\mu\; H_{At}\;\; A_t\,) - \,p_{Ht} \cdot H_{At} \ , \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.38}$$

Επειδή τα κέρδη είναι γραμμικά στο H_{At} (ήτοι είναι $\mathrm{d}^2\pi_{\mathrm{At}}/\mathrm{dH}^2_{\mathrm{At}} = 0$ για κάθε H_{At}) η μεγιστοποίηση των κερδών θα οδηγήσει σε ακραίες λύσεις εάν οι τιμές δεν είναι τέτοιες ώστε να μηδενίζουν τα κέρδη για κάθε επίπεδο H_{At}. Δεδομένου, ειδικότερα, ότι:

$$d\pi_{At}\,/\,dH_{At} = \,\mu\; p_{At}\;\, A_t - p_{Ht} = \pi_{At}\,/\,H_{At} \tag{7.39}$$

η άριστη λύση είναι :

$$H_{At} = 0 \text{ εάν } p_{Ht} > \mu\, p_{At}\; A_t \text{ και } H_{At} \to \infty \text{ εάν } p_{Ht} < \mu\;\, p_{At}\; A_t \tag{7.40}$$

Κατά συνέπεια, το σημείο ισορροπίας, εφόσον τούτο αντιστοιχεί σε πεπερασμένη εσωτερική λύση $H_{At} > 0$, θα ικανοποιεί την ακόλουθη αναγκαία συνθήκη:

$$p_{Ht} > \mu\, p_{At}\, A_t \quad \text{ή} \quad p_{At} = \frac{p_{Ht}}{\mu A_t} \qquad \forall\ t \geq 0 \tag{7.41}$$

Η συνθήκη (7.41) εκφράζει την εξίσωση του δεδομένου οριακού κόστους με το δεδομένο οριακό έσοδο του ανθρώπινου κεφαλαίου και εξασφαλίζει την εξίσωση $d\pi_{At} / dH_{At} = 0$ για κάθε $H_{At} > 0$.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, οι άριστες επιλογές του μονοπωλητή παραγωγού των νέων *blueprints* στο σημείο ισορροπίας θα χαρακτηρίζονται από τις συνθήκες (7.34) και (7.41), οι οποίες είναι δύο ισότητες που πρέπει να ικανοποιεί η τιμή p_{At} των *blueprints*. Ο δε νόμος κίνησης του πλήθους των *blueprints*, ή ισοδύναμα πλήθος των αντιστοίχων επιχειρήσεων του κλάδου παραγωγής ενδιάμεσων προϊόντων, δίνεται από την εξίσωση (7.35) ή την ισοδύναμη (7.36).

7.3 Στάσιμη Ισορροπία του Σημείου Ανταγωνιστικής Ισορροπίας της Οικονομίας

7.3.1 Συνθήκες Γενικής Ισορροπίας

Προκειμένου να τονίσουμε και να ξεχωρίσουμε τις συνθήκες που χαρακτηρίζουν το σημείο γενικής ισορροπίας που επιτυγχάνει ο μηχανισμός της αγοράς όπως τούτες προέκυψαν από την προηγηθείσα ανάλυση, ας επαναλάβουμε και συγκεντρώσουμε τις σχετικές συνθήκες παρακάτω.

Από τις συνθήκες ισορροπίας των νοικοκυριών έχουμε :

$$\frac{u_{c\,t}}{u_{c\,t+1}} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta[1 + p_{k_{t+1}}] \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.9}$$

$$h_t = 1 \quad \text{και} \quad H_t = H \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.10}$$

$$k_{t+1} = k_t + y_t - c_t, \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.3}$$

Από δε τις συνθήκες ισορροπίας των τριών κλάδων παραγωγής, έχουμε:

$$Y_t = \left(H_{Y_t}\right)^{\alpha} . \left(L_{Y_t}\right)^{b} . \int_0^{A_t} \left[x_t(z)\right]^{1-\alpha-b} dz \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.11)$$

$$\alpha H_{Yt}^{\alpha-1} L_{Yt}^{b} \int_0^{A_t} x_t(z)^{1-\alpha-b} dz = p_{Ht}, \, H_{Yt} > 0, \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.16)$$

$$b H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b-1} \int_0^{A_t} x_t(z)^{1-\alpha-b} dz = p_{ht}, \, L_{Yt} > 0, \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.17)$$

$$(1-\alpha-b) H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b} x_t(z)^{1-\alpha-b} = p_{xt}(z), x_t(z) > 0, \; \forall z \cdot 0 \leq z \leq A_t, \forall t \geq 0 \qquad (7.18)$$

$$X_t(z) = m\left[(1-\alpha-b)^2 \lambda\right]^{1/(\alpha+b)} \left[H_{Yt}^{\alpha} L_{Yt}^{b}\right]^{1/(\alpha+b)} p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} > 0 \qquad (7.26)$$

$$p_{xt}(z) = \left[\lambda(1-\alpha-b)\right]^{-1} p_{kt} > 0, \qquad \forall z{:}0 \leq z \leq A_t, \forall t \geq 0 \qquad (7.27)$$

$$K_t \equiv K_t(z) = (1/\lambda) X_t, \qquad \forall z{:}0 \leq z \leq A_t, \forall t \geq 0 \qquad (7.30)$$

$$\pi_{xt} \equiv \pi_{xt}(z) = (\alpha+b) p_{xt} X_t > 0, \qquad \forall z, \forall t \qquad (7.31)$$

$$A_{t+1} = (1 + \mu \cdot H_{At}) A_t \;, \; \mu > 0 \;, \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.36)$$

$$p_{Ht} > \mu \, p_{At} \, A_t \;\; \text{ή} \;\; p_{At} = \frac{p_{Ht}}{\mu A_t} \qquad \forall \; t \geq 0 \qquad (7.41)$$

$$p_{At} = \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[R_{t,s} \cdot \pi_{xs}\right] \qquad (7.34)$$

$$R_{s,t} = \prod_{j=s+1}^{t} (1+p_{kj})^{-1} = \frac{1}{1+p_{kt}} R_{s,t-1} \; \forall t \geq s+1, R_{s,s} \equiv 1 \qquad (7.24)$$

Ειδικότερα, οι σχέσεις (7.11), (7.16), (7.17) και (7.18) αναφέρονται στο πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού παραγωγού του τελικού προϊόντος. Οι δε σχέσεις (7.26), (7.27), (7.30) και (7.31) αναφέρονται στο πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού παραγωγού ενός ενδιάμεσου προϊόντος, δεδομένης της συμμετρίας των διαφόρων τύπων ενδιάμεσων προϊόντων. Οι σχέσεις (7.36), (7.41) και (7.34), τέλος, αφορούν τον κλάδο έρευνας (*R&D*) και παραγωγής νέων τεχνολογιών (*blueprints*).

Εξάλλου, οι συνθήκες εκκαθάρισης των αγορών τελικού προϊόντος, εργασίας, ανθρωπίνου κεφαλαίου, ενδιάμεσων προϊόντων και φυσικού κεφαλαίου, αντίστοιχα, είναι:

$$n\,y_t = mY_t \qquad ή \qquad n(c_t + k_{t+1} - k_t) = m\,Y_t \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.42}$$

$$n\,h_t = m\,L_{Yt} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.43}$$

$$n\,H_t = m\,H_{Yt} + H_{At} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.44}$$

$$m\ x_t(z) = X_t(z)\,, \qquad \forall\, z \leq A_t \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.45}$$

$$n\,k_t = \int_0^{A_t} K_t(z)\,dz \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.46}$$

όπου επισημαίνουμε ότι το δεξιό σκέλος της (7.46) είναι η συνολική ζήτηση φυσικού κεφαλαίου από όλες τις επιχειρήσεις του κλάδου παραγωγής ενδιάμεσων προϊόντων.

<u>Παρατήρηση:</u> Κατά την προηγηθείσα ανάλυση της ισορροπίας των τριών κλάδων παραγωγής, αποδείξαμε ότι στη γενική ισορροπία τα καθαρά κέρδη όλων των επιχειρήσεων και των τριών κλάδων είναι μηδενικά. Έπεται, τότε ότι και τα μερίσματα που εισπράττουν τα νοικοκυριά είναι μηδενικά, ήτοι $d_t = 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Από τη συμμετρία στην παραγωγή των ενδιάμεσων προϊόντων έπεται ότι θα έχουμε και συμμετρία στην κατανάλωσή τους, ήτοι στην χρησιμοποίησή τους από τις επιχειρήσεις παραγωγής του τελικού προϊόντος. Ετσι είναι
$x_t(z) = x_t$ για τύπο ενδιάμεσου προϊόντος, ενώ οι (7.45) και (7.26) δίνουν ειδικότερα:

$$x_t \equiv x_t(z) = [(1-\alpha-b)^2\,\lambda]^{1/(\alpha+b)}\,[H_{Yt}^{\alpha}\,L_{Yt}^{b}]^{1/(\alpha+b)}\ p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} \quad \forall\, t \geq 0 \tag{7.47}$$

όπου x_t είναι η κοινή ποσότητα στην οποία χρησιμοποιούνται τα ενδιάμεσα προϊόντα από την κάθε επιχείρηση παραγωγής του τελικού προϊόντος.

Επίσης, η συνθήκη ισορροπίας της αγοράς φυσικού κεφαλαίου (7.46) και οι (7.30) και (7.45) έπονται:

$$n\,k_t = m(1/\lambda)\int_0^{A_t} x_t(z)\,dz \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.48}$$

Λόγω δε της συμμετρίας $x_t(z) = x_t$ των ενδιάμεσων προϊόντων, η (7.48) συνεπάγεται:

$$n k_t = m(1/\lambda) A_t x_t \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.49}$$

Εν προκειμένω, η (7.48) ή η (7.49) εκφράζει το συνολικό κεφάλαιο της οικονομίας σε σχέση με το σύνολο των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών αγαθών που παράγονται από τον ενδιάμεσο κλάδο και που χρησιμοποιούνται ως παραγωγική εισροή στον κλάδο του τελικού προϊόντος.

Επίσης λόγω της συμμετρίας αυτής των ενδιάμεσων προϊόντων, η (7.11) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} Y_t &= (H_{Y_t})^{\alpha} (L_{Y_t})^{b} A_t (x_t)^{1-\alpha-b} = \\ &= (A_t\ H_{Y_t})^{\alpha} (A_t\, L_{Y_t})^{b} (A_t x_t)^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Η σχέση (7.50) έχει πλέον πάρει μία αρκετά απλή μορφή και θυμίζει τις απλές συναρτήσεις παραγωγής τελικού προϊόντος που χρησιμοποιούνται σε υποδείγματα με έναν τομέα παραγωγής. Εάν δε προχωρήσουμε και αντικαταστήσουμε τις (7.42), (7.43), (7.44) και (7.49) στην (7.50), προκύπτει τελικά:

$$y_t = (A_t \tfrac{m}{n} H_{Yt})^{\alpha} (A_t h_t)^{b} (\lambda\, k_t)^{1-\alpha-b} \qquad \text{ή}$$

$$y_t = (\lambda^{1-\alpha-b}) A_t^{\alpha+b} (H_t - \tfrac{1}{n} H_{At})^{\alpha}\ h_t^{b}\, k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.51}$$

Η (7.51) δίνει το κατά κεφαλή προϊόν, ήτοι το εισόδημα του νοικοκυριού, στο σημείο γενικής ισορροπίας. Πρόκειται δε για μια οιονεί συνάρτηση παραγωγής που χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας ως προς την εργασία, το φυσικό και το ανθρώπινο κεφάλαιο, ενώ η τεχνολογική πρόοδος –που εκφράζεται από το A_t- είναι αυτή που επιτρέπει την μακροχρόνια οικονομική μεγέθυνση. Καλείται ως "οιονεί" διότι δεν αφορά απλώς μία προκαθορισμένη τεχνολογία παραγωγής, αλλά προκύπτει από συνθήκες ισορροπίας, ήτοι διαδικασίες αριστοποιητικών επιλογών.

Εάν δε στις (7.16) και (7.17) εισάγουμε τις (7.43), (7.44) και (7.49), δεδομένης της συμμετρίας $x_t\ (z) = x_t$, παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις αμοιβές του ανθρώπινου κεφαλαίου και της εργασίας:

$$p_{Ht} = \alpha(\lambda^{1-\alpha-b})\, A_t^{\alpha+b}\,(H_t - 1/n\, H_{At})^{\alpha-1}\, h_t^b\, k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.52}$$

$$p_{ht} = b(\lambda^{1-\alpha-b})\, A_t^{\alpha+b}\,(H_t - 1/n\, H_{At})^{\alpha}\, h_t^{b-1}\, k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.53}$$

όπου οι (7.52) και (7.53) δίνουν ακριβώς τα οριακά προϊόντα της εργασίας και του ανθρώπινου κεφαλαίου για την οιονεί συνάρτηση παραγωγής (7.51).

<u>Παρατήρηση</u>: Με αυτό τον τρόπο, η οιονεί συνάρτηση παραγωγής (7.51) είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιεί ο Robert Solow (1956), όπου εξετάζει την μακροχρόνια οικονομική μεγέθυνση με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο. Η ουσιώδης όμως διαφορά του συγκεκριμένου υποδείγματος έγκειται στο ότι η τεχνολογική πρόοδος είναι τώρα μια ενδογενής διαδικασία. Η κατανομή, μάλιστα, του ανθρωπίνου κεφαλαίου μεταξύ του κλάδου παραγωγής του τελικού προϊόντος και του κλάδου της *R&D*, είναι ο βασικός μηχανισμός διά του οποίου προσδιορίζεται ενδογενώς ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου και ο αναλογούν ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης. Τούτο είναι ευδιάκριτο στις σχέσεις (7.36) και (7.51). Από τη θέση του H_{At} στις (7.36) και (7.51), ειδικότερα βλέπουμε ότι το *trade-off* για την αύξηση του ρυθμού τεχνολογικής προόδου είναι η μείωση του κατά κεφαλή προϊόντος λόγω της απαιτούμενης μεταφοράς ανθρωπίνου κεφαλαίου από τον κλάδο παραγωγής τελικού προϊόντος στον κλάδο της *R&D*. Εξάλλου, αντικαθιστώντας τις (7.43) και (7.44) στη (7.47), παίρνουμε:

$$x_t = \frac{n}{m}\left[(1-\alpha-b)^2\,\lambda\right]^{1/(\alpha+b)}\left[(H_t - 1/n\, H_{At})^{\alpha}\, h_t^b\right]^{1/(\alpha+b)}\, p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.54}$$

ως μία εναλλακτική εξίσωση ισορροπίας για το επίπεδο παραγωγής του κάθε ενδιάμεσου προϊόντος.

Εάν δε εισάγουμε τις (7.27) και (7.45) στην (7.31) και αντικαταστήσουμε εν συνεχεία στην (7.34), έπεται:

$$p_{At} = \frac{m(\alpha+b)}{\lambda(1-\alpha-b)}\sum_{s=t+1}^{\infty}\left[R_{t,s}\, p_{ks}\, x_s\right] \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{7.55}$$

Συνδυάζοντας, τώρα, τις (7.55) και (7.41), προκύπτει τελικά:

$$p_{Ht} = \left[\frac{m\mu(\alpha + b)}{\lambda(1 - \alpha - b)} \right] \cdot A_t \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[R_{t,s} \; p_{ks} \; x_s \right] \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.56)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι συνθήκες (7.52) και (7.56) αναφέρονται και οι δύο στην αμοιβή του ανθρώπινου κεφαλαίου. Ειδικότερα, η (7.52) απαιτείται για την ισορροπία του κλάδου παραγωγής του τελικού προϊόντος, ήτοι εκφράζει την εξίσωση αμοιβής του ανθρωπίνου κεφαλαίου με το οριακό προϊόν του στην παραγωγή τελικού προϊόντος. Η εξίσωση (7.56) απαιτείται για την ισορροπία του κλάδου της *R&D* και παραγωγής των *blueprints*, ήτοι εκφράζει την εξίσωση της αμοιβής του ανθρώπινου κεφαλαίου με το οριακό προϊόν του στην έρευνα και παραγωγή νέας τεχνολογίας. Στη γενική ισορροπία πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες ταυτόχρονα.

7.3.2 Το Δυναμικό Σύστημα Γενικής Ισορροπίας της Οικονομίας

Με όλη την προηγηθείσα ανάλυση, έχουμε ουσιαστικά "κλείσει" το υπόδειγμά μας, ήτοι έχουμε προσδιορίσει όλες τις δυναμικές εξισώσεις που μας δίνουν την δυναμική εξέλιξη των μεταβλητών που χαρακτηρίζουν το υπόδειγμα αυτό.

Αναλυτικότερα, δεδομένου εκ της (7.10) ότι $h_t=1$ και $H_t=H$ και δεδομένης της συμμετρίας των ενδιάμεσων προϊόντων, έπεται από τις (7.3), (7.9), (7.24), (7.36), (7.49), (7.51), (7.52), (7.53), (7.54) και (7.56), ότι το δυναμικό σύστημα για τις βασικές ενδογενείς μεταβλητές της οικονομίας είναι το ακόλουθο:

$$y_t = \lambda^{1-\alpha-b} A_t^{\alpha+b} (H_t - \frac{1}{n} H_{A_t})^{\alpha} k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.57)$$

$$k_t = (m/n \cdot 1/\lambda) A_t x_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.58)$$

$$x_t = n/m \, B(H_t - 1/n \, H_{At})^{\alpha/(\alpha+b)} \, p_{kt}^{-1/(\alpha+b)} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.59)$$

$$p_{ht} = b(\lambda^{1-\alpha-b}) A_t^{\alpha+b} (H_t - 1/n \, H_{At})^{\alpha} \, k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.60)$$

$$p_{Ht} = \alpha(\lambda^{1-\alpha-b}) A_t^{\alpha+b} (H_t - 1/n \, H_{At})^{\alpha-1} \, k_t^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.61)$$

$$p_{Ht} = m\Gamma \cdot A_t \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[\prod_{j=t+1}^{s} \left(1 + p_{kj}\right)^{-1} \cdot p_{ks} \cdot x_s \right] \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.62)$$

$$A_{t+1} = (1 + \mu H_{At}) A_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.63)$$

$$c_{t+1} = \left\{\beta\left[1 + p_{kt+1}\right]\right\}^{(1/\gamma)} c_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.64)$$

$$k_{t+1} = k_t + y_t - c_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.65)$$

όπου οι παράμετροι B και Γ ορίζονται: $B \equiv \left\{\left[\lambda(1-\alpha-b)^2\right]^{1/\alpha+b}\right\} > 0$

$$\Gamma \equiv \left\{(\mu/\lambda)\left[(\alpha+b)/(1-\alpha-b)\right]\right\} > 0 .$$

Το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων (7.57) έως (7.65), μαζί με τις αρχικές συνθήκες για το φυσικό κεφάλαιο και τη γνώση και την τεχνολογία (ήτοι $k_0 \in \Re_{++}$ και $A_0 \in \Re_{++}$ δεδομένα) και την τερματική συνθήκη που προκύπτει ως αναγκαία *transversality* condition στο πρόβλημα του νοικοκυριού, χαρακτηρίζει πλήρως τη δυναμική εξέλιξη της οικονομίας του υποδείγματός μας.. Το σύστημα αυτό εκφράζει τη διαχρονική πορεία του σημείου ανταγωνιστικής ισορροπίας είτε στη στάσιμη ισορροπία, είτε όχι.

Παρατήρηση: Το σημείο γενικής ισορροπίας, που χαρακτηρίζεται από τις συνθήκες (7.57)-(7.65), προκύπτει από τον μηχανισμό της αγοράς, ήτοι από τις ελεύθερες αριστοποιητικές επιλογές των ορθολογικών οικονομικών μονάδων και την ελεύθερη ισορροπία των διαφόρων αγορών προϊόντων και παραγωγικών συντελεστών. Υπενθυμίζουμε, όμως, ότι η διάρθρωση αυτών των αγορών δεν είναι τέλεια ανταγωνιστική. Οι ατέλειες αναφέρονται, ειδικότερα, στην αγορά των διαφοροποιημένων ενδιάμεσων προϊόντων και στην αγορά της έρευνας των *blueprints*: η μεν πρώτη είναι ατελώς ή μονοπωλιακά ανταγωνιστική , η δε δεύτερη είναι μονοπωλιακή. Αυτές δε οι ατέλειες συνιστούν τον ένα λόγο για τον
οποίο ο μηχανισμός της αγοράς δεν εξασφαλίζει εν προκειμένω αποτελεσματικότητα κατά *Pareto*. Όταν, λοιπόν, αναφερόμαστε παρακάτω στο σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας, δεν εννοούμε γενική ισορροπία υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού, αλλά υπονοούμε την προκείμενη ατελώς ανταγωνιστική ισορροπία.

Παρατήρηση: Ο μηχανισμός της αγοράς πάσχει από άλλο ένα ελάττωμα. Η κατανομή του ανθρωπίνου κεφαλαίου δεν είναι άριστη από διαχρονικής απόψεως, καθώς δεν υπολογίζει τα δυναμικά αποτελέσματα επί της διαδικασία έρευνας και συσσώρευσης γνώσης. Ετσι, ο μηχανισμός της αγοράς προμηθεύει με σχετικά λίγο ανθρώπινο κεφάλαιο τον κλάδο έρευνας (*R&D)* και παραγωγής νέων και τεχνολογικά προηγμένων *blueprints*, με τελικό αποτέλεσμα ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου, και ο αναλογούν ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης να είναι μικρός. Οι εξωτερικότητες της γνώσης και της τεχνολογικής προόδου, λοιπόν, συνιστούν τη δεύτερη αιτία για την αποτυχία του μηχανισμού αγοράς να επιτύχει το *Pareto Optimum*.

7.3.3. Η Στάσιμη Ισορροπία

Από το σύστημα (7.57)-(7.65) της γενικής ισορροπίας της οικονομίας μπορούμε να προχωρήσουμε και να επικεντρωθούμε στην ανάλυση της στάσιμης ισορροπίας (της καταστάσεως σταθερούς ισορροπίας ή *steady state*) της οικονομίας. Ορίζουμε, άλλωστε, τη στάσιμη ισορροπία ως εκείνη την κατάσταση γενικής ισορροπίας όπου ο λόγος του κατά κεφαλή προϊόντος προς το κατά κεφαλή φυσικό κεφάλαιο παραμένει σταθερός, έστω σε $y_t / k_t = \phi^*$.

Εναλλακτικά και ισοδύναμα, στη στάσιμη ισορροπία (i) το πραγματικό επιτόκιο της οικονομίας, δηλαδή το ενοίκιο-αμοιβή του φυσικού κεφαλαίου, είναι σταθερό στο χρόνο και (ii) η αναλογία στην οποία κατανέμεται το ανθρώπινο κεφάλαιο μεταξύ του κλάδου παραγωγής του τελικού προϊόντος και του κλάδου έρευνας και τεχνολογικής προόδου είναι επίσης σταθερή. Εστω, λοιπόν, ότι στη στάσιμη ισορροπία το πραγματικό επιτόκιο είναι $p_k^* > 0$, σταθερό, και το μέρος του συνολικού ανθρωπίνου κεφαλαίου που απασχολείται στο κλάδο έρευνας (*R&D*) είναι $H_A^* : 0 < H_A^* < n \cdot H$, σταθερό.

Έπεται, τότε, από τη (7.59) ότι επίσης σταθερό είναι στη στάσιμη ισορροπία το επίπεδο παραγωγής κάθε ενδιάμεσου προϊόντος:

$$x^* = n/m \, B (H - 1/n \, H_A^*)^{\alpha/(\alpha+b)} (p_k^*)^{-1/(\alpha+b)} \tag{7.66}$$

Η δε (7.63) συνεπάγεται ότι στη στάσιμη ισορροπία ο ρυθμός της τεχνολογικής προόδου, όπως τούτη μετράται από το μέγεθος A_t, θα είναι σταθερός σε g^*_A, και ειδικότερα:

$$(1+g^*_A)\equiv A_{t+1}/A_t=1+\mu H^*_A \qquad ή \qquad g^*_A=\mu\, H^*_A>0 \tag{7.67}$$

Εν συνεχεία, έπεται από την (7.58) ότι ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλή φυσικού κεφαλαίου θα είναι επίσης σταθερός και θα ισούται με το ρυθμό τεχνολογικής προόδου. Το φυσικό κεφάλαιο κινείται παράλληλα με τη γνώση (ήτοι το πλήθος των *blueprints*):

$$k_t=(m/n)(1/\lambda)x^*\cdot A_t \qquad \forall t\geq 0 \tag{7.68}$$

συνεπώς είναι:

$$1+g^*_k\equiv k_{t+1}/k_t=A_{t+1}/A_t\equiv 1+g^*_A \qquad ή \qquad g^*_k=g^*_A \tag{7.69}$$

Τότε, όμως, οι (7.57) και (7.68) δίνουν το κατά κεφαλή προϊόν στη στάσιμη ισορροπία ως ακολούθως:

$$y_t=\mathrm{A}_t^{\alpha+b}(H-1/n\,H^*_A)^{\alpha}(\lambda k_t)^{1-\alpha-b}=$$

$$\left[(H-1/n\,H^*_A)^{\alpha}(m/n)^{1-\alpha-b}(x^*)^{1-\alpha-b}\right]A_t \qquad \forall t\geq 0 \tag{7.70}$$

οπότε και έπεται, εφόσον τα H_A^* και x^* είναι σταθερά, ότι το κατά κεφαλή προϊόν θα αυξάνεται στον ίδιο ρυθμό με την τεχνολογική πρόοδο, επομένως:

$$1+g^*_y\equiv y_{t+1}/y_t=A_{t+1}/A_t\equiv 1+g^*_A \qquad ή \quad g^*_y=g^*_A \tag{7.71}$$

Συνδυάζοντας δε τις (7.69) και (7.71), συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή προϊόντος και ο ρυθμός συσσώρευσης φυσικού κεφαλαίου θα είναι ίσοι, ήτοι $y_{t+1}/y_t = k_{t+1}/k_t$ ή $g_y^* = g_k^*$. Τότε ,όμως, η (7.65) και η (7.3) συνεπάγονται ότι στο ίδιο ρυθμό θα αυξάνονται και η κατανάλωση και η επένδυση. Είναι, δηλαδή:

$$c_{t+1} / c_t = i_{t+1} / i_t = y_{t+1} / y_t = k_{t+1} / k_t \quad ή \quad g_c^* = g_i^* = g_y^* = g_k^* \tag{7.72}$$

Από τις σχέσεις (7.67), (7.69) και (7.72), λοιπόν, καταλήγουμε ότι στη στάσιμη ισορροπία ισχύει:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + \mu H_A^* \quad ή \quad g_c^* = g_y^* = g_k^* = g_A^* = \mu H_A^* \tag{7.73}$$

Η (7.73) είναι βέβαια συμβατή με την αρχική υπόθεση ότι ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος παραμένει σταθερός σε τιμή φ^*. Από τις (7.68) και (7.70), ειδικότερα, προκύπτει ότι αυτός ο σταθερός λόγος είναι:

$$\phi^* \equiv {y_t}/{k_t} = \lambda (\mathrm{H} - {1}/{n} H_A^*)^{\alpha} ({m}/{n}\, x^*)^{-\alpha - b}$$

και αντικαθιστώντας το x^* από την (7.66), παίρνουμε:

$$\phi^* \equiv y_t / k_t = (1 - \alpha - b)^{-2} \, p_k^* \quad ή \quad p_k^* = (1 - \alpha - b)^2 \, \phi^* \tag{7.74}$$

Σημειώνεται, εξάλλου, ότι η σχέση $p_{kt}^* = (1 - \alpha - b)^2 \, y_t / k_t$ ισχύει εν γένει στη γενική ισορροπία της οικονομίας, ασχέτως του εάν βρισκόμαστε στη σταθερή κατάσταση ή όχι.

Παρατήρηση: Στα υποδείγματα τέλειου ανταγωνισμού με ένα κλάδο παραγωγής, μια συνθήκη ισορροπίας που συναντάμε είναι ότι η αμοιβή του κεφαλαίου ισούται με το οριακό προϊόν του: $p_k = MPK = (1\text{-}\alpha\text{-}b)\, y/k$. Η σχέση (7.74) και γενικότερα η προηγηθείσα ανάλυση συνεπάγονται, αντίθετα, ότι στο υπόδειγμα που εξετάζουμε, δεδομένου ότι $(1\text{-}a\text{-}b)<1$, η αμοιβή του φυσικού κεφαλαίου είναι μικρότερη του οριακού προϊόντος του: $p_k^* < MPK = (1\text{-}\alpha\text{-}b)\, y/k$. Το συμπέρασμα αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι στο υπόδειγμά μας η αγορά των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών αγαθών είναι μονοπωλιακά ανταγωνιστική. Ειδικότερα, δεδομένου ότι ελαστικότητα ζήτησης των ενδιάμεσων αγαθών είναι $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha + b}$, οι μονοπωλιακά ανταγωνιστικές επιχειρήσεις του ενδιάμεσου κλάδου υπερτιμολογούν το προϊόν τους κατά το ποσοστό $\dfrac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon}} - 1 = \dfrac{a+b}{1-\alpha-b}$, και η προκύπτουσα διαφορά τιμής και κόστους δίνει τα μονοπωλιακά κέρδη τους. Ετσι, και εφόσον το οριακό κόστος παραγωγής των ενδιάμεσων προϊόντων είναι η αμοιβή του κεφαλαίου και η τιμή τους είναι το οριακό προϊόν τους στην παραγωγή του τελικού προϊόντος, έπεται ότι η άριστη τιμολογιακή πολιτική απαιτεί: p_x^* *(1-α-b)* = p_k^* *ή* p_x^* *(1-α-b)* < *MPK*. Κατά συνέπεια, η διαφορά μεταξύ του οριακού προϊόντος του φυσικού κεφαλαίου και της αμοιβής του, όπως τούτη η διαφορά προκύπτει από τις ανταγωνιστικές ατέλειες των αγορών, καταδεικνύει και τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ της ανταγωνιστικής ισορροπίας και του *Pareto Optimum*.

Από την (7.73) και δεδομένης της (7.65) έπεται ότι στη στάσιμη ισορροπία τα ποσοστά κατανάλωσης c_t/y_t και αποταμίευσης είναι:

$$s^* \equiv (k_{t+1} - k_t)/y_t = 1 - c_t/y_t = g_k^*/\phi^* = \mu H_A^*(1-\alpha-b)^2(p_k^*)^{-1} \qquad (7.75)$$

Εξάλλου, οι (7.60), (7.61) και (7.62) συνεπάγονται, δεδομένης της (7.68) ή της (7.72), ότι ο πραγματικός μισθός (ήτοι η παραγωγικότητα της εργασίας) και η αμοιβή του ανθρωπίνου κεφαλαίου (ήτοι η παραγωγικότητα αυτού) αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό στον οποίο αυξάνεται η γνώση A_t και, συνεπώς, με τον ίδιο ρυθμό στον οποίο αυξάνονται το κατά κεφαλή εισόδημα και το κεφάλαιο της οικονομίας.

Δεδομένου ότι τα p_k^*, H_A^* και x^* είναι σταθερά, από την (7.62) έπεται:

$$p_{H_t} = \Gamma m A_t \Big[\sum_{s=t+1}^{\infty} (1+p_k^*)^{-s+t}\, p_k^* x^* \Big] = \Gamma m A_t \left[\frac{1}{p_k^*} \right] p_k^* x^* \;\Rightarrow$$

$$p_{Ht} = \Gamma m x^* A_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.76)$$

ενώ οι (7.61) και (7.68) συνεπάγονται:

$$p_{H_t} = \alpha\left[\left(H - \tfrac{1}{n}H_A^*\right)^{\alpha-1}\left(\tfrac{m}{n}x^*\right)^{1-\alpha-b}\right].A_t \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.77}$$

Εισάγοντας την (7.76) στην (7.77) και επιλύοντας ως προς x^*, καταλήγουμε:

$$\left(\tfrac{m}{n}x^*\right)^{\alpha+b} = \alpha\, n^{-1}\, \Gamma^{-1}\left(H - \tfrac{1}{n}H_A^*\right)^{\alpha-1} \tag{7.78}$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, το x^* στην (7.78) από την (7.66), καταλήγουμε:

$$B^{\alpha+b}\left(H - \tfrac{1}{n}H_A^*\right)^{\alpha}\left(p_k^*\right)^{-1} = \alpha\, n^{-1}\; \Gamma^{-1}\left(H - \tfrac{1}{n}H_A^*\right)^{\alpha-1} \qquad \Rightarrow$$

$$p_k^* = \mu\cdot\Delta\cdot(nH - H_A^*) \tag{7.79}$$

όπου $B \equiv \left\{\left[\lambda(1-\alpha-b)^2\right]^{1/(\alpha+b)}\right\}$, $\quad \Gamma \equiv \left\{(\mu/\lambda)\left[(\alpha+b)/(1-\alpha-b)\right]\right\}$ και $\Delta \equiv \left[(1-\alpha-b)(\alpha+b)\alpha^{-1}\right] > 0$.

Η εξίσωση (7.79) συσχετίζει το πραγματικό επιτόκιο p_k^* με το τμήμα H_A^* του ανθρώπινου κεφαλαίου που αφιερώνεται στην έρευνα. Από την άλλη, η (7.73) συσχετίζει το H_A^* με το ρυθμό $g_c^* = g_y^* = g_A^*$ της τεχνολογικής προόδου και της οικονομικής μεγέθυνσης. Επιλύοντας την (7.79) ως προς H_A^* βρίσκουμε:

$$\mu H_A^* = \mu\, n H - \Delta^{-1} p_k^* \tag{7.80}$$

και αντικαθιστώντας το προκύπτον αποτέλεσμα στην (7.73), καταλήγουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ του ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης και του πραγματικού επιτοκίου:

$$1 + g_c^* \equiv \frac{c_{t+1}}{c_t} = 1 + \mu\, n H - \Delta^{-1}\cdot p_k^* \tag{7.81}$$

όπου $g_c^* = g_y^* = g_i^* = g_k^* = g_A^*$ είναι ο ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης και όπου η παράμετρος Δ ορίζεται ως: $\Delta \equiv \left[(1-\alpha-b)(\alpha+b)\alpha^{-1}\right] > 0$. Επισημαίνουμε δε ότι οι (7.80) και (7.81) συνεπάγονται ένα άνω φράγμα για το ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης, με $g_c^* < \mu n H$, εφόσον βέβαια $p_k^* > 0$.

Μία δεύτερη, όμως, σχέση μεταξύ του ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης και του πραγματικού επιτοκίου δίνεται από την αριστοποιητική συνθήκη για τη διαχρονική κατανομή της κατανάλωσης των νοικοκυριών. Από τη συνθήκη (7.64), ειδικότερα, έπεται:

$$1 + g_c^* \equiv \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{\beta\left[1 + p_k^*\right]\right\}^{1/\gamma} \tag{7.82}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η συσχέτιση μεταξύ του ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης και του πραγματικού επιτοκίου είναι θετική κατά τη συνθήκη (7.82), ενώ αρνητική κατά τη συνθήκη (7.81). Αυτό δεν θα πρέπει να μας δημιουργεί ερωτηματικά, καθώς η κάθε μία από αυτές τις συνθήκες αναφέρεται σε διαφορετικές αριστοποιητικές επιλογές. Ειδικότερα, η (7.81) χαρακτηρίζει την ισορροπία στην παραγωγή, ήτοι την ταυτόχρονη ισορροπία και των τριών κάθετα εξειδικευμένων τομέων της παραγωγής. Η ερμηνεία της αρνητικής συσχέτισης μεταξύ του επιτοκίου και ανάπτυξης που περιγράφει η (7.81), είναι ότι όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο τόσο μικρότερη είναι η παρούσα προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών κερδών του κλάδου παραγωγής ενδιάμεσων προϊόντων, οπότε και τόσο μικρότερη είναι η τιμή στην οποία μπορεί να πουλήσει ο κλάδος της έρευνας (*R&D*) τα παραγόμενα *blueprints*, με αποτέλεσμα τόσο μικρότερη να είναι η αποδοτικότητα του ανθρωπίνου κεφαλαίου στην έρευνα. Έπεται τότε, ότι όσο μεγαλύτερο το επιτόκιο, τόσο λιγότερο ανθρώπινο κεφάλαιο απασχολείται στον κλάδο τεχνολογικής έρευνας και ανάπτυξης, οπότε και τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου και οικονομικής μεγέθυνσης. Η συνθήκη (7.82), αντίθετα, χαρακτηρίζει την ισορροπία στην κατανάλωση, ήτοι τις αριστοποιητικές επιλογές των νοικοκυριών σχετικά με τη διαχρονική ροή της κατανάλωσής τους. Η θετική συσχέτιση μεταξύ επιτοκίου και ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης που εκφράζει η (7.82), προκύπτει επειδή τα νοικοκυριά υποκαθιστούν τόσο περισσότερη τρέχουσα κατανάλωση με μελλοντική κατανάλωση, όσο υψηλότερη είναι η απόδοση της

αποταμίευσης και του κεφαλαίου, ήτοι όσο ακριβότερη είναι η τρέχουσα κατανάλωση σε σχέση με τη μελλοντική. Κατά συνέπεια, η συνθήκη (7.82) πρέπει να γίνει αντιληπτή ως μία συνάρτηση ζήτησης για τον μακροχρόνιο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης, όπου τον αντίστροφο ρόλο της τιμής παίζει το πραγματικό επιτόκιο. Για τη γενική ισορροπία, την ταυτόχρονη ισορροπία στην κατανάλωση και την παραγωγή, και στην ευσταθή στάσιμη ισορροπία βέβαια, οι συνθήκες (7.81) και (7.82) πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Οι αντίστοιχες καμπύλες ζήτησης και προσφοράς, δηλαδή, τέμνονται στη στάσιμη ισορροπία.

Εφόσον στη στάσιμη ισορροπία ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, από την επίλυση του συστήματος των (7.81) και (7.82) μπορούμε εν γένει να υπολογίσουμε τις τιμές του πραγματικού επιτοκίου και του ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης που επικρατούν στη στάσιμη ισορροπία. Εχοντας δε υπολογίσει αυτές τις τιμές, μπορούμε στη συνέχεια να επιστρέψουμε σε προηγούμενες συνθήκες για να υπολογίσουμε και τα λοιπά σταθερά μεγέθη που χαρακτηρίζουν τη στάσιμη ισορροπία, όπως τα x^*, s^*, φ^* και H_A^* από τις (7.66), (7.74), (7.75) και (7.80), αντίστοιχα.

7.3.4 <u>Ο Μακροχρόνιος Ρυθμός Οικονομικής Μεγέθυνσης</u>

Για τον προσδιορισμό του μακροχρόνιου ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω ανάλυση. Επιλύουμε έστω την εξίσωση (7.81) ως προς το πραγματικό επιτόκιο και αντικαθιστούμε ύστερα στην (7.82). Τότε, έπεται:

$$g_c^* = \left\{\beta\left[1+\Delta\mu n H - \Delta g_c^*\right]\right\}^{1/\gamma} - 1 \tag{7.83}$$

Ο ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης στη στάσιμη ισορροπία της οικονομίας δίνεται ακριβώς από την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης. Εναλλακτικά, ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση πεπλεγμένης μορφής:

$$G(g_c; n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma) \equiv 1 + g_c - \left\{\beta\,[1+\Delta(\mu n H - g_c)]\right\}^{1/\gamma} \tag{7.84}$$

Ο ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης στη στάσιμη ισορροπία δίνεται, τότε, ως συνάρτηση των εξωγενών παραμέτρων:

$$g_c^* \equiv g(n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma) \tag{7.85}$$

όπου η συνάρτηση *g(.)* της (7.85) είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται πάντα η (7.84), ήτοι, η *g(.)* ορίζεται τέτοια ώστε:

$$G(g(n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma); n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma) \equiv 0 \qquad \forall n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma \tag{7.86}$$

Με τις γνωστές μεθόδους των πεπλεγμένων συναρτήσεων, εξάλλου, μπορούμε από τις ιδιότητες της *G(.)* να εξάγουμε τις ιδιότητες της *g(.)*. Σημειώνουμε δε ότι η *G(.)* είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγήσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Από την (7.84), λοιπόν, έχουμε:

$$G(0; n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma) = 1 - \{\beta\,[1 + \Delta\,\mu\,n\,H\,]\}^{1/\gamma} \tag{7.87}$$

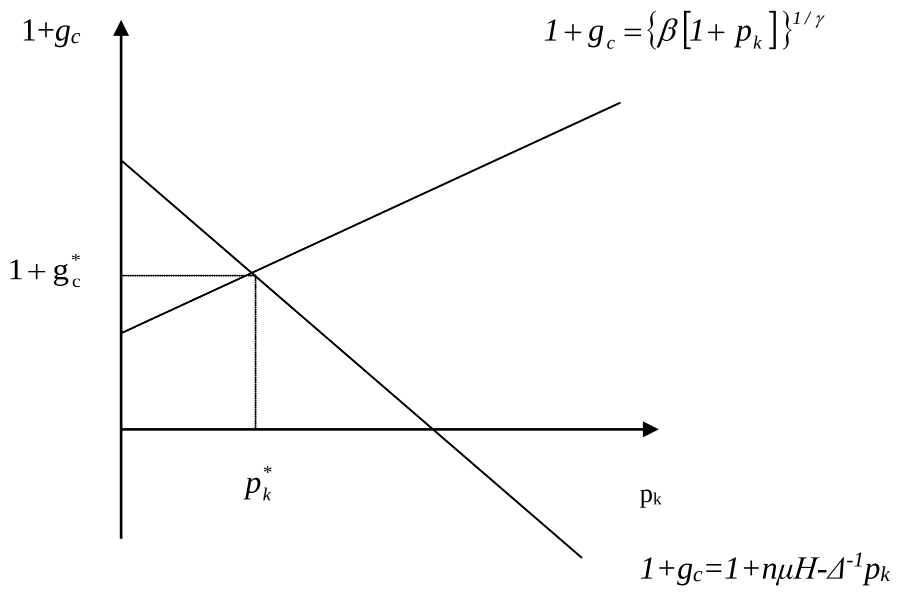
$$G(+\infty; n, H, \mu, \Delta, \beta, \gamma) = +\infty > 0 \tag{7.88}$$

καθώς και:

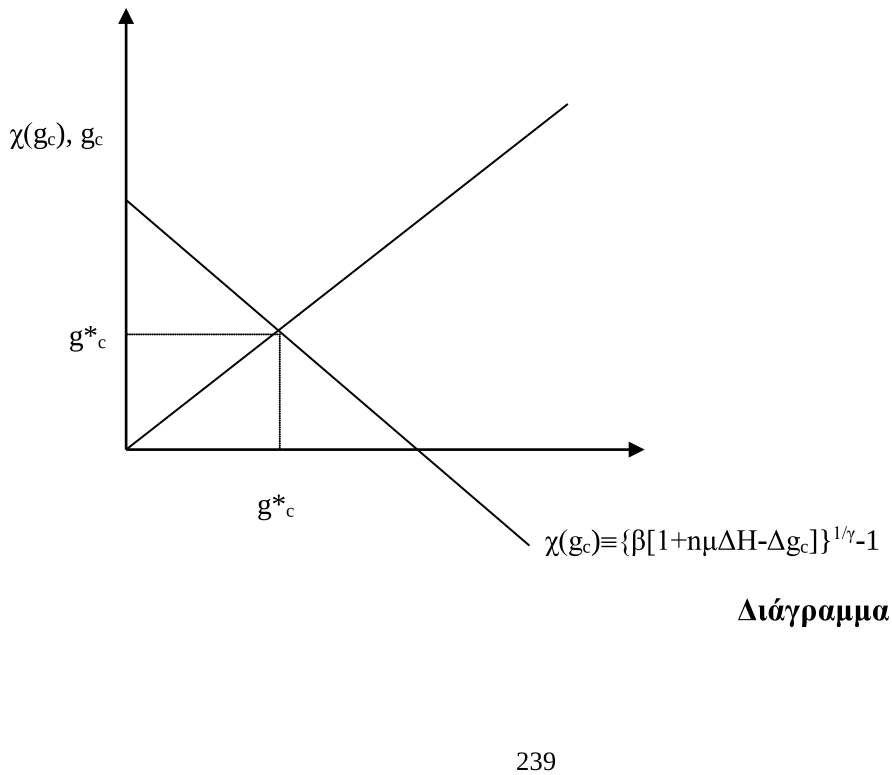
$$\partial G(.)/\partial g_c = 1 - (1/\gamma)\beta\Delta\{\beta[1 + \Delta(\mu nH - g_c)]\}^{(1-\gamma)/\gamma} > 0 \tag{7.89}$$

Εφόσον, λοιπόν, η *G(.)* είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα για κάθε τιμή $g_c \in [0, +\infty]$, οι (7.87) και (7.88) συνεπάγονται ότι θα υπάρχει θετική λύση για το ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης, ήτοι $g_c^* \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $G(g_c^*; .) = 0$, εάν και μόνο εάν $G(0\ ;\ .)<0$. Από την (7.87) έπεται, λοιπόν, ότι η συνθήκη $g_c^* > 0$, ικανοποιείται εφόσον το συνολικό ανθρώπινο κεφάλαιο της οικονομίας δεν είναι πολύ μικρό, ήτοι εφόσον $n\,H > \mu^{-1}\,\Delta^{-1}\,(1-\beta)\,\beta^{-1}$. Επιπλέον, οι (7.81) και (7.82) συνεπάγονται ότι η συνθήκη $p_k^* > 0$ ικανοποιείται μόνο εφόσον $nH > \mu^{-1}(\beta^{1/\gamma} - 1)$. Σε όλη την παρακάτω ανάλυση, λοιπόν, υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, οπότε στάσιμη ισορροπία είναι καλά προσδιορισμένη.

Η παραπάνω αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού του g_c μπορεί εναλλακτικά να αναπαρασταθεί γραφικά, όπως στα Διαγράμματα 7.1 και 7.2 που ακολουθούν. Εάν σχεδιάσουμε τις εξισώσεις (7.81) και (7.82) στο χώρο του επιτοκίου και του ρυθμού ανάπτυξης, $(p_k, g_c) \equiv \Re_+ \otimes \Re_+$, οι τιμές p_k^* και g_c^* του δίνονται από την τομή των αντίστοιχων δύο καμπυλών, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.1. Στο δε διάγραμμα 7.2.



Διάγραμμα 7.1



Διάγραμμα 7.2

έχουμε τη γραφική αναπαράσταση της επίλυσης της εξίσωσης (7.83). Στο 7.2, η ευθεία των 45 μοιρών εκφράζει το αριστερό σκέλος της (7.83) και η αρνητικά κεκλιμένη καμπύλη εκφράζει το δεξιό σκέλος της ίδιας εξίσωσης, οπότε η τομή τους μας δίνει το g_c^* ισορροπίας.

Περαιτέρω, είναι εύκολο από τις ιδιότητες της *G(.)* να προχωρήσουμε στη συγκριτική στατική ανάλυση της στάσιμης ισορροπίας. Και ειδικότερα, μπορούμε να δούμε τι πρόσημο έχουν οι μερικοί παραγωγοί της *g(.)* στην (7.85), ήτοι ποιά είναι η επίδραση των διαφόρων παραμέτρων επί του μακροχρονίου ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης.

Στην (7.89), λοιπόν, έχουμε ήδη υπολογίσει την μερική παράγωγο της *G(.)* ως προς το ρυθμό μεγέθυνσης g_c, οπότε και βρήκαμε ότι τούτη είναι αυστηρά θετική. Από την (7.84) υπολογίζουμε και τις μερικές παραγώγους της *G(.)* ως προς τις άλλες, τις εξωγενείς μεταβλητές, και ελέγχουμε το πρόσημό τους:

$$\partial G / \partial \beta = -\, {}^{1}\!/_{\gamma}\, [1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}^{{}^{1-\gamma}\!/_{\gamma}} < 0 \tag{7.90}$$

$$\partial G / \partial \Delta = -\, {}^{1}\!/_{\gamma}\, \beta(\mu n H - g_c)\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}^{{}^{1-\gamma}\!/_{\gamma}} < 0 \tag{7.91}$$

$$\partial G / \partial n = -\, {}^{1}\!/_{\gamma}\, \beta \Delta \mu H\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}^{{}^{1-\gamma}\!/_{\gamma}} < 0 \tag{7.92}$$

$$\partial G / \partial H = -\, {}^{1}\!/_{\gamma}\, \beta \Delta \mu n\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}^{{}^{1-\gamma}\!/_{\gamma}} < 0 \tag{7.93}$$

$$\partial G / \partial \mu = -\, {}^{1}\!/_{\gamma}\, \beta \Delta n H\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}^{{}^{1-\gamma}\!/_{\gamma}} < 0 \tag{7.94}$$

$$\partial G / \partial \gamma = \gamma^{-2} \ln\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c)]\}\{\beta[1 + \Delta(\mu n H - g_c]\}^{{}^{1}\!/_{\gamma}} > 0 \tag{7.95}$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζοντας το γνωστό θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων στην περίπτωση των *G(.)* και $g_c^* = g(.)$, από τις (7.84) και (7.90)-(7.95), βρίσκουμε:

$$\partial g_c^* / \partial \beta = -(\partial G / \partial \beta)/(\partial G / \partial g_c) > 0 \tag{7.96}$$

$$\partial g_c^* / \partial \Delta = -(\partial G / \partial \Delta) / (\partial G / \partial g_c) > 0 \tag{7.97}$$

$$\partial g_c^* / \partial n = -(\partial G / \partial n) / (\partial G / \partial g_c) > 0 \tag{7.98}$$

$$\partial \mathrm{g}_\mathrm{c}^* / \partial \mathrm{H} = -(\partial \mathrm{G} / \partial \mathrm{H}) / (\partial \mathrm{G} / \partial \mathrm{g}_\mathrm{c}) > 0 \tag{7.99}$$

$$\partial \mathrm{g}_\mathrm{c}^* / \partial \mu = -(\partial \mathrm{G} / \partial \mu) / (\partial \mathrm{G} / \partial \mathrm{g}_\mathrm{c}) > 0 \tag{7.100}$$

$$\partial \mathrm{g}_\mathrm{c}^* / \partial \gamma = -(\partial \mathrm{G} / \partial \gamma) / (\partial \mathrm{G} / \partial \mathrm{g}_\mathrm{c}) < 0 \tag{7.101}$$

όπου οι μερικοί παράγωγοι της *G(.)* παραπάνω είναι υπολογισμένοι στο σημείο $g_c = g_c^*$.

Από τις (7.96)-(7.101) έπεται ότι αύξηση στον μακροχρόνιο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης g_c^* προκαλεί (i) μια αύξηση στο συντελεστή διαχρονικής προτίμησης β με τον οποίο τα νοικοκυριά προεξοφλούν το μέλλον στο παρόν, (ii) μια αύξηση στην ελαστικότητα διαχρονικής προτίμησης σ =1/γ, (iii) μια αύξηση στην παράμετρο ταχύτητας της τεχνολογικής προόδου μ, ή (v) μια αύξηση στην παράμετρο $\Delta \equiv (1-\alpha-b)(\alpha+b)\alpha^{-1}$.

7.4 Το Pareto Optimum της Οικονομίας

7.4.1 Το Πρόβλημα του Κοινωνικού Σχεδιαστή

Ο κοινωνικός σχεδιαστής εσωτερικοποιεί τη διαδικασία της τεχνολογικής προόδου και λειτουργεί ταυτόχρονα ως καταναλωτής και παραγωγός σε όλους τους κλάδους της οικονομίας. Τοιουτοτρόπως, παίρνοντας ως δεδομένο το πόρισμα της συμμετρίας μεταξύ των διαφόρων ενδιάμεσων προϊόντων και παραλείποντας ορισμένες πράξεις, καταλήγουμε ότι το πρόβλημα διαχρονικής επιλογής που αντιμετωπίζει ο κοινωνικός σχεδιαστής, είναι το ακόλουθο:

$$\max_{\{c_t, i_t, H_t, H_{A_t}, x_t, y_t; k_{t+1}, A_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{7.102}$$

υπό τους περιορισμούς

$$c_t + i_t = y_t \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.103}$$

$$k_{t+1} = k_t + i_t \qquad \forall t \geq 0 \tag{7.104}$$

$$y_t = (m/n)^{1-\alpha-b} A_t (H_t - \frac{1}{n} H_{A_t})^{\alpha} (h_t)^b (x_t)^{1-\alpha-b} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.105)$$

$$k_t = (m/n)(1/\lambda) A_t x_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.106)$$

$$A_{t+1} = (1 + \mu H_{At}) A_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.107)$$

$$h_t = 1, \; H_t = H \qquad \forall t \geq 0 \qquad (7.108)$$

$$c_t \geq 0, \; i_t \geq 0, \; y_t \geq 0, x_t \geq 0, \; k_{t+1} \geq 0, H_{A_t} \geq 0, \; A_{t+1} \geq 0 \;\; \forall t \geq 0 \qquad (7.109)$$

$$k_o \in \Re_{++}, \; A_o \in \Re_{++}, \; H \in \Re_{++} \qquad \text{δεδομένα} \qquad (7.110)$$

Το πρόβλημα (7.102)-(7.110) έχει δύο μεταβλητές κατάστασης (*state variables*), τις k_{t+1} και A_{t+1}, και όλες οι άλλες ενδογενείς μεταβλητές μπορούν από τους περιορισμούς (7.103)-(7.108) να εκφραστούν πλήρως ως συναρτήσεις αυτών των δύο. Για παράδειγμα, το συνολικό ανθρώπινο κεφάλαιο που απασχολείται στην έρευνα (*R&D*) και το κατά κεφαλή εισόδημα ή τελικό προϊόν δίνονται, αντίστοιχα, ως ακολούθως:

$$H_{At} = (1/\mu)(A_{t+1} - A_t)/A_t \qquad (7.111)$$

$$y_t = (\lambda^{1-\alpha-b})[HA_t + (1/n\mu)A_t - (1/n\mu)A_{t+1}]^{\alpha} [A_t]^b [k_t]^{1-\alpha-b} \qquad (7.112)$$

Κάνοντας, λοιπόν, τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, και εφόσον ο περιορισμός (7.110) περί θετικότητας των μεταβλητών δεν παραβιάζεται, το πρόβλημα (7.102)-(7.110) παίρνει την παρακάτω μορφή προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές κατάστασης:

$$\max_{\{k_{t+1}, A_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\{k_t - k_{t+1} + (\lambda^{1-\alpha-b})[(H + 1/n\mu)A_t - (1/n\mu)A_{t+1}]^{\alpha}[A_t]^b[k_t]^{1-\alpha-b}\} \qquad (7.113)$$

Η συνάρτηση χρησιμότητας *u(.)*, βέβαια, είναι σταθερής ελαστικότητας διαχρονικής υποκατάστασης, ήτοι υποθέτουμε:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \qquad \text{με} \qquad u'(c) = c^{-\gamma} \qquad (7.114)$$

όπου $\sigma=1/\gamma,\ \sigma\in(0,+\infty)$ είναι η σταθερή ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης στην κατανάλωση.

7.4.2 Οι Συνθήκες Αριστοποίησης κατά Pareto

Έστω ότι το πρόβλημα (7.113)-(7.114) έχει μια εσωτερική λύση, με τους περιορισμούς θετικότητας των μεταβλητών να ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες. Τότε, καταλήγουμε – ύστερα από μερικούς απλούς μαθηματικούς χειρισμούς – ότι οι αναγκαίες συνθήκες που χαρακτηρίζουν τη λύση του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή, είναι οι ακόλουθες δύο, για κάθε $t\geq 0$:

$$\frac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}}=\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}=\beta\left[1+(1-\alpha-b)\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}\right] \tag{7.115}$$

$$\frac{u_{c_t}}{u_{c_{t+1}}}=\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}=\beta\left[\frac{\left(\alpha(H+1/n\mu)\dfrac{n}{nH-H_{A_{t+1}}}+b\right)\left(\dfrac{y_{t+1}}{A_{t+1}}\right)}{\left(\alpha(1/n\mu)\dfrac{n}{nH-H_{A_t}}\right)\left(\dfrac{y_t}{A_t}\right)}\right] \tag{7.116}$$

όπου $c_t=y_t+k_t-k_{t+1}$ και y_t και H_{At} δίνονται από τις (7.112) και (7.111), αντίστοιχα. Η σχέση (7.115) αντιστοιχεί στη συνθήκη *Euler* για την μεταβλητή κατάστασης k_{t+1} και η (7.116) στη συνθήκη *Euler για την μεταβλητή κατάστασης* A_{t+1} . Αντικαθιστώντας τα y_t και H_{At} από τις (7.112) και (7.111) στις (7.115) και (7.116), παίρνουμε ένα σύστημα δύο διαφορετικών εξισώσεων δευτέρας τάξης για τις μεταβλητές κατάστασης k_{t+1} και A_{t+1}. Το σύστημα αυτό, μαζί με τις δύο αρχικές συνθήκες της (7.110) και τις δύο τερματικές συνθήκες (*transversality conditions*) που αντιστοιχούν στο πρόβλημα (7.113), προσδιορίζει πλήρως τη δυναμική τροχιά των μεταβλητών k_{t+1} και A_{t+1} στο *Pareto Optimum*, οπότε και την αντίστοιχη διαχρονική πορεία της οικονομίας.

7.4.3 Ο Μακροχρόνιος Ρυθμός Οικονομικής Μεγέθυνσης στη Στάσιμη Ισορροπία του Pareto Optimum

Από τις συνθήκες (7.115) και (7.116) μπορούμε εξάλλου να χαρακτηρίσουμε τη στάσιμη ισορροπία που αντιστοιχεί στο *Pareto Optimum*, και το οποίο διαφέρει από τη στάσιμη ισορροπία που επιτυγχάνει ο μηχανισμός της αγοράς σε γενική ισορροπία.

Αυτή η στάσιμη ισορροπία ορίζεται επίσης ως εκείνη η κατάσταση ισορροπίας όπου ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος παραμένει σταθερός στο χρόνο, έστω σε ύψος $k_t / y_t = \varphi^o$ για κάθε περίοδο.

Εάν, όμως, ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος είναι σταθερός, έπεται τότε ότι το (κατά κεφαλή) φυσικό κεφάλαιο και το (κατά κεφαλή) προϊόν αυξάνονται στον ίδιο ρυθμό, καθώς και ότι, δεδομένων των (7.103) και (7.104), στον ίδιο ρυθμό αυξάνεται τόσο η κατανάλωση, όσο και η επένδυση. Η δε (7.115) έπεται ότι, για σταθερό λόγο κεφαλαίου-προϊόντος, σταθερός θα είναι και ο ρυθμός αυτός της οικονομικής μεγέθυνσης. Είναι, λοιπόν:

$$1+g_c^o \equiv \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{i_{t+1}}{i_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} \quad \text{ή} \quad g_c^o = g_i^o = g_y^o = g_k^o \tag{7.117}$$

όπου g_c^o είναι ο σταθερός μακροχρόνιος ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης στη στάσιμη ισορροπία του *Pareto Optimum.*

Τότε, η συνθήκη (7.116), δεδομένων των (7.107) και (7.117), συνεπάγεται ότι:

$$(1+g_c^o)^{\gamma} = \beta \left[\frac{\left(\alpha(H+1/n\mu)\frac{n}{\left(nH-H_{A_{t+1}}\right)} + b \right)}{\left(\alpha(1/n\mu)\frac{n}{nH-H_{A_t}} \right)(1+\mu H_{At})} \right] (1+g_y^o) \tag{7.118}$$

από όπου και έπεται ότι, εφόσον ο ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης $g_c^o = g_y^o$ είναι σταθερός, σταθερό είναι και το τμήμα του συνολικού ανθρωπίνου κεφαλαίου που αφιερώνεται στην επιστημονική και τεχνολογική έρευνα (R&D). Έστω, λοιπόν, ότι τούτο είναι H_A^o. 'Αμεση συνέπεια είναι, εκ της (7.107) ή (7.111), ότι είναι σταθερός, έστω σε ύψος g_A^o, και ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου, ήτοι ο ρυθμός αύξησης του A_t. Από δε την (7.112) έπεται ότι ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου ισούται με τον κοινό ρυθμό αύξησης του προϊόντος και του φυσικού κεφαλαίου.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, είναι:

$$1+g_c^o \equiv \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+\mu H_A^0 \quad \text{ή} \quad g_c^o = \mu H_A^0 \tag{7.119}$$

από όπου και έπεται ότι ο λόγος y_t/A_t είναι σταθερός στο χρόνο. Δεδομένου, τώρα, ότι το τμήμα του συνολικού ανθρωπίνου κεφαλαίου που αφιερώνεται στην έρευνα (*R&D*) είναι σταθερό σε $\mathrm{H}_{\mathrm{A}}^0$ και ότι ο λόγος y_t/A_t είναι επίσης σταθερός, η συνθήκη (7.116) συνεπάγεται:

$$(1+g_c^o)^\gamma = \beta\left[\frac{\alpha(nH+1/\mu)+b(nH-H_A^o)}{\alpha(1/\mu)}\right]$$

Ορίζοντας δε την παράμετρο $\Theta \equiv (\alpha+b)/\alpha$, με $\Theta>1$, καταλήγουμε:

$$1+g_c^o = \{\beta[1+\Theta\mu nH-(\Theta-1)\mu H_A^o]\}^{1/\gamma} \tag{7.120}$$

όπου $(\Theta\text{-}1) \equiv b/\alpha > 0$.

Οι σχέσεις (7.119) και (7.120) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, το H_A^o και το g_c^o. Το σύστημα αυτό μπορεί να επιλυθεί για να μας δώσει τις άριστες κατά *Pareto* τιμές των δύο μεταβλητών. Ειδικότερα για τον άριστο κατά *Pareto* μακροχρόνιο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης, εισάγοντας την (7.119) στην (7.120), παίρνουμε:

$$g_c^o = \{\beta[1+\Theta\mu nH-(\Theta-1)g_c^0]\}^{1/\gamma}-1 \tag{7.121}$$

Η (7.121) έχει την μορφή πεπλεγμένης συνάρτησης, έστω $F(g_c^o;.)=0$, όπου:

$$F(g_c;.) \equiv 1+g_c^o-\{\beta[1+\Theta\mu nH-(\Theta-1)g_c^o]\}^{1/\gamma} \qquad (7.122)$$

με $F(g_c^{o\prime};)=0$ ως προς το g_c^o μας δίνει το άριστο κατά *Pareto* μακροχρόνιο ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης ως συνάρτηση των εξωγενών μεταβλητών και παραμέτρων:

$$g_c^o \equiv f(n,H,\mu,\Theta,\beta,\gamma) \qquad (7.123)$$

όπου η $f(.)$ ορίζεται τέτοια ώστε $F(f(.);.) \equiv 0$.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες της (7.122), μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε στην περίπτωση της στάσιμης ισορροπίας της αγοραίας γενικής ισορροπίας. Τα ποιοτικά συμπεράσματα, μάλιστα, δεν μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα, βρίσκουμε ότι είναι:

$$\partial g_c^0/\partial\beta=-(\partial F/\partial\beta)/(\partial F/\partial g_c)>0 \qquad (7.124)$$

$$\partial g_c^0/\partial\Delta=-(\partial F/\partial\Delta)/(\partial F/\partial g_c)>0 \qquad (7.125)$$

$$\partial g_c^0/\partial n=-(\partial F/\partial n)/(\partial F/\partial g_c)>0 \qquad (7.126)$$

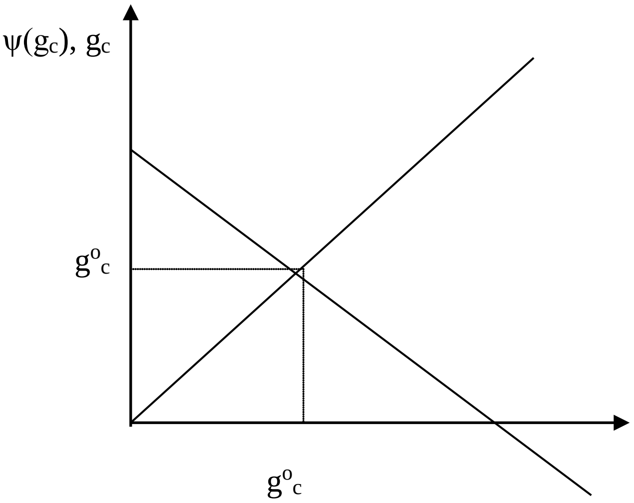
$$\partial g_c^0/\partial H=-(\partial F/\partial H)/(\partial F/\partial g_c>0 \qquad (7.127)$$

$$\partial g_c^0/\partial\mu=-(\partial F/\partial\mu)/(\partial F/\partial g_c)>0 \qquad (7.128)$$

$$\partial g_c^0/\partial\gamma=-(\partial F/\partial\gamma)0/(\partial F/\partial g_c)0<0 \qquad (7.129)$$

Οι σχέσεις (7.124) έως (7.129) εκφράζουν τη συγκριτική στατική ανάλυση της στάσιμης ισορροπίας στο άριστο κατά *Pareto* σημείο ισορροπίας της οικονομίας.

Εξάλλου, μπορούμε και γραφικά να προσδιορίσουμε το g_c^o, όπως είχαμε κάνει και στην περίπτωση του μηχανισμού της αγοράς. Βλέπετε σχετικά στο Διάγραμμα 7.3 που ακολουθεί και που είναι ανάλογο του Διαγράμματος 7.2. Η ευθεία των 45 μοιρών απεικονίζει το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (7.121), ενώ η αρνητικά κεκλιμένη ευθεία αναπαριστά το δεξιό σκέλος της (7.121). Η τομή τους μας δίνει την τιμή ισορροπίας g_c^o του άριστου κατά *Pareto* ρυθμού οικονομικής μεγέθυνσης.



$$\psi(g_c) \equiv \{\beta[1+\Theta\mu H-(\Theta-1)\, g_c\}^{1/\gamma}-1$$

Διάγραμμα 7.3

7.4.4. Σύγκριση της Ανταγωνιστικής Ισορροπίας και του Pareto Optimum στη Στάσιμη Ισορροπία (Σταθερή Κατάσταση)

Όπως έχει αναλυθεί σε προηγούμενη ενότητα, το *Pareto Optimum* της οικονομίας δεν συμπίπτει με το σημείο γενικής ισορροπίας που επιτυγχάνει ο μηχανισμός της αγοράς. Η αποτυχία αυτή του μηχανισμού της αγοράς οφείλεται σε δύο παράγοντες: αφενός στις εξωτερικότητες που χαρακτηρίζουν την παραγωγή νέας γνώσης και αφετέρου στις ατέλειες των αγορών των ενδιάμεσων προϊόντων και των blueprints. Οι δύο αυτοί παράγοντες οδηγούν σε αναποτελεσματική κατανομή του ανθρωπίνου κεφαλαίου μεταξύ του κλάδου παραγωγής του τελικού προϊόντος και εκείνου της έρευνας (R&D) και παραγωγής νέων τεχνολογιών (blueprints). Ειδικότερα, στον τελευταίο κλάδο ο μηχανισμός της αγοράς κατανέμει ανθρώπινο κεφάλαιο λιγότερο από το άριστο κατά *Pareto*, με αποτέλεσμα να είναι σχετικά μικρή η έρευνα και παραγωγή νέας γνώσης. Έπεται, τότε, ότι ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου και οικονομικής μεγέθυνσης που επιτυγχάνει η ανταγωνιστική ισορροπία είναι μικρότερος από τον άριστο κατά *Pareto.*

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αυστηρά από τη σύγκριση της τελικής συνθήκης (7.83) που χαρακτηρίζει τη στάσιμη ισορροπία της ανταγωνιστικής ισορροπίας, με την τελική συνθήκη που χαρακτηρίζει τη στάσιμη ισορροπία του *Pareto Optimum* (7.121). Για διευκόλυνση, μάλιστα, αναπαράγουμε τις δύο συνθήκες παρακάτω:

$$g_c^* = \{ \beta[1 + \Delta\mu nH - \Delta g_c^*]\}^{1/\gamma} - 1 \tag{7.83}$$

$$g_c^0 = \{ \beta[1 + \Theta\mu nH - (\Theta - 1) g_c^o]\}^{1/\gamma} - 1 \tag{7.121}$$

όπου g_c^* και g_c^0 είναι ο ρυθμός μακροχρόνιας μεγέθυνσης της ανταγωνιστικής ισορροπίας και του *Pareto Optimum*, αντίστοιχα. Οι δε παράμετροι Δ και Θ ορίζονται ως εξής:
$\Delta \equiv (1 - \alpha - b)(\alpha + b)/\alpha > 0$ και $\Theta \equiv (\alpha + b)/\alpha > 1$, οπότε έπεται ότι $\Delta \equiv (1 - \alpha - b)\Theta < \Theta$, καθώς και $(\Theta - 1) \equiv b/\alpha > 0$ ενώ η σχέση μεταξύ του Δ και του (Θ-1) είναι αμφίβολη.

Από τα αριστερά μέλη των (7.83) και (7.121), ας ορίσουμε τις συναρτήσεις $\chi(g_c)$ και $\psi(g_c)$, αντίστοιχα, ως ακολούθως:

$$\chi(g_c) \equiv \{ \beta[1 + \Delta\mu nH - \Delta g_c]\}^{1/\gamma} - 1 \tag{7.130}$$

$$\psi(g_c) \equiv \{ \beta[1 + \Theta\mu nH - (\Theta - 1) g_c]\}^{1/\gamma} - 1 \tag{7.131}$$

Έπεται, τότε ότι οι (7.83) και (7.121) εκφράζονται ισοδύναμα ως $\chi(g_c^o) = g_c^o$ και $\psi(g_c^o) = g_c^o$, αντίστοιχα.

Από τις (7.130) και (7.131) μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους $\chi'(g_c)$ και $\psi'(g_c)$. Βρίσκουμε τότε ότι οι κλίσεις των δύο καμπυλών είναι αρνητικές, ήτοι $\chi'(g_c) < 0$ και $\psi'(g_c) < 0$ για κάθε g_c. Εξάλλου, είναι $\chi'(g_c) < \psi'(g_c)$ για κάθε $g_c \in [0, \omega]$ εάν και μόνο εάν *Δ>(Θ-1),* ενώ είναι $\chi'(g_c) > \psi'(g_c)$ εάν και μόνο εάν *Δ<(Θ-1),* όπου ω είναι ένας κατάλληλα ορισμένος και αρκετά μεγάλος θετικός αριθμός.

Η παράμετρος *ω>0* έχει αρκετά μεγάλη τιμή, ώστε η ανάλυση μας μπορεί να περιοριστεί στο διάστημα *[0,ω],* δεδομένου ότι είναι $g_c^* \in [0,\omega]$ και $g_c^o \in [0,\omega]$.

Οι δύο συναρτήσεις $\chi(g_c)$και $\psi(g_c)$αναπαρίστανται γραφικά στο Διάγραμμα7.4, μαζί με την ευθεία των 45 μοιρών. Έτσι, το Διάγραμμα 7.4 αποτελεί ταυτόχρονη παρουσίαση των Διαγραμμάτων 7.2 και 7.3. Οι τομές των καμπυλών $\chi(g_c)$και $\psi(g_c)$με την ευθεία των 45 μοιρών δίνουν τις τιμές ισορροπίας g_c^* και g_c^o, αντίστοιχα, καθώς το σημείο τομής Ε εκφράζει την εξίσωση (7.89), ήτοι την ανταγωνιστική ισορροπία, και το σημείο P εκφράζει την εξίσωση (7.121), ήτοι το *Pareto Optimum*. Από την ανάλυση της σχέσεως μεταξύ των δύο συναρτήσεων $\chi(g_c)$και $\psi(g_c)$ (από τις σχέσεις 7.130 και 7.131. αντιστοίχως) τελικά έπεται ότι για οποιεσδήποτε τιμές των εξωγενών μεταβλητών και παραμέτρων, είναι : $g_c^* < g_c^o$.

Προκειμένου να αποδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα, ακολουθούμε τους παρακάτω αναλυτικούς χειρισμούς. Κατ'αρχάς, από τις (7.130) και (7.131), υπολογίζουμε τις τιμές των $\chi(g_c)$και $\psi(g_c)$στο $g_c=0$, ήτοι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών με τον κατακόρυφο άξονα:

$$\chi(0) = \{\beta[1+\Delta\mu n H]\}^{1/\gamma} - 1 \equiv c > 0 \qquad (7.132)$$

$$\psi(0) = \{\beta[1+(\Theta\mu n H)]\}^{1/\gamma} - 1 \equiv d > 0 \qquad (7.133)$$

Εφόσον $\Delta<\Theta$, από τις (7.132) και (7.133) έπεται ότι $\chi(0)=c<d=\psi(0)$.

Εν συνεχεία, υπολογίζουμε το σημείο τομής των δύο καμπυλών. Εστω, λοιπόν ότι $g_c=w$ είναι η τιμή του g_c για την οποία $\chi(g_c)=\psi(g_c)$. Από τις (7.130) και (7.131) έχουμε:

$$\chi(g_c) = \psi(g_c) \Leftrightarrow g_c = (\Theta-\Delta)[(\Theta-1)-\Delta]^{-1}\mu n H \equiv w \qquad (7.134)$$

Εφόσον $\Theta>\Delta$, έπεται ότι w<0 εάν και μόνο εάν $\Delta>(\Theta\text{-}1)$, ενώ w>0 εάν και μόνο εάν Δ<(Θ-1). Προηγουμένως όμως δείξαμε ότι $\chi'(g_c) < \psi'(g_c)$εάν και μόνο εάν $\Delta>(\Theta\text{-}1)$, ενώ $\chi'(g_c) > \psi'(g_c)$εάν και μόνο εάν $\Delta<(\Theta\text{-}1)$.

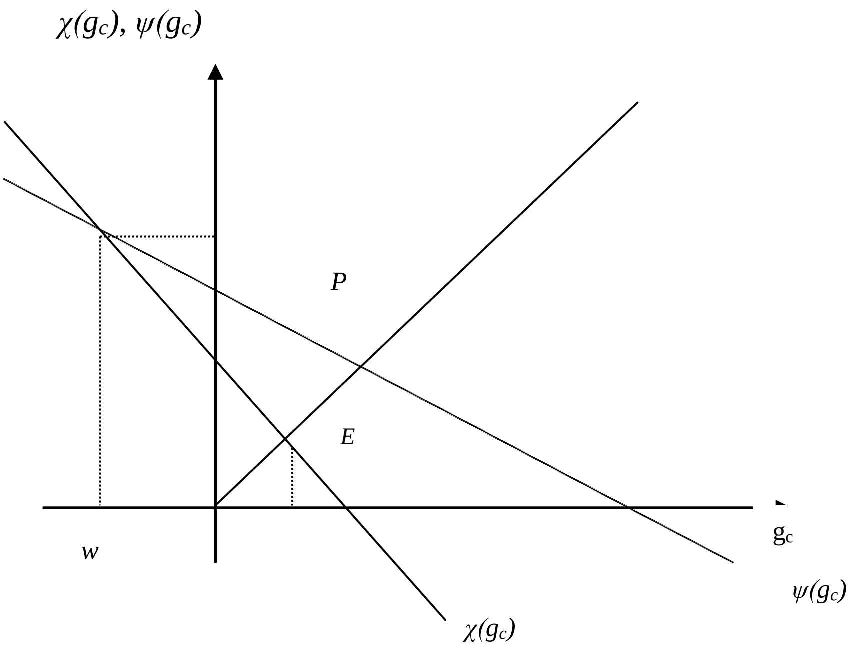
Διακρίνουμε, λοιπόν, δύο περιπτώσεις: για $\Delta>(\Theta\text{-}1)$ και για $\Delta<(\Theta\text{-}1)$. Στην περίπτωση όπου $\Delta>(\Theta\text{-}1)$ έχουμε ότι οι καμπύλες $\chi(.)$ και $\psi(.)$ τέμνονται σε $\mathrm{g_c = w < 0}$

και διέρχονται τον κατακόρυφο άξονα από τα σημεία χ(0) = c<d=ψ(0), ενώ είναι $\chi'(g_c) < \psi'(g_c)$. Κατά συνέπεια, για τη διαφορά [ψ-χ] των δύο συναρτήσεων είναι $[\psi\text{-}\chi](0)=\psi(0)\text{-}\chi(0)>0$ και $[\psi - \chi]'(g_c) = \psi'(g_c) - \chi'(g_c) > 0$, ήτοι η *[ψ-χ]* έχει θετική τιμή στο g_c=0 και είναι αυστηρά αύξουσα πέραν τούτου. Έπεται ότι η *[ψ-χ]* έχει θετικές τιμές για g_c>0, ήτοι η καμπύλη *ψ(.)* κείται ψηλότερα από την καμπύλη *χ(.)*. Τούτο συνεπάγεται ότι το σημείο τομής P της *ψ(.)* με την ευθεία των 45 μοιρών βρίσκεται ψηλότερα (και δεξιότερα) του σημείου τομής Ε της *χ(.)* με την ευθεία των 45 μοιρών. Το συμπέρασμα λοιπόν, είναι ότι για την περίπτωση όπου *Δ>(Θ-1),* ισχύει $g_c^o > g_c^*$. Η περίπτωση αυτή αναπαρίσταται γραφικά στο Διάγραμμα 7.4.

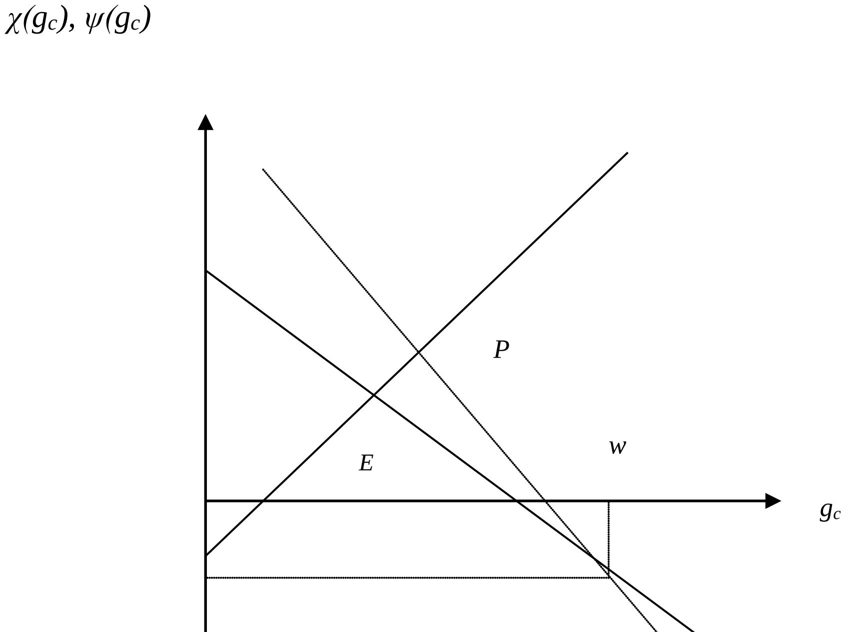
Για την εναλλακτική και αντίθετη περίπτωση όπου *Δ<(Θ-1),* έχουμε για τη διαφορά των δύο συναρτήσεων ότι είναι $[\psi\text{-}\chi](0)=\psi(0)\text{-}\chi(0)>0$ και $[\psi\text{-}\chi]'(g_c)=\psi'(g_c)\text{-}\chi'(g_c)<0$, ενώ $[\psi\text{-}\chi](w)=\psi(w)\text{-}\chi(w)=0$ με w>0. Δηλαδή, η [ψ-χ] είναι αυστηρά φθίνουσα, έχει θετική τιμή στο g_c=0 και διατηρεί θετικές τιμές στο διάστημα [0,w), μηδενίζεται στο $g_c=w>0$ και αποκτά αρνητικές τιμές πέραν τούτου. Κατά συνέπεια, η καμπύλη *ψ(.)* κείται ψηλότερα της καμπύλης *χ(.)* μόνο στο διάστημα [0,w), ενώ οι δύο καμπύλες τέμνονται στο g_c=w>0. Υπολογίζουμε, τώρα, από τις (7.130)-(7.131) και (7.134), την κοινή τιμή των *χ(.)* και *ψ(.)* στο $g_c=w$:

$$\chi(w) = \psi(w) = \{\beta[1 - \Delta(\Theta - 1 - \Delta)^{-1}\mu nH]\}^{1/\gamma} - 1 \equiv e \qquad (7.135)$$

Δεδομένου ότι Δ<(Θ-1), έπεται από την (135) ότι *χ(w)=ψ(w)=e<0,* ήτοι το σημείο τομής των δύο καμπυλών δίνει αρνητική τιμή. Μέχρι του σημείου αυτού η ψ(.) κείται πάνω από την *χ(.).* Εξάλλου, δεδομένου ότι οι δύο συναρτήσεις είναι αυστηρά φθίνουσες, το σημείο αυτό βρίσκεται δεξιότερα των σημείων όπου μηδενίζονται οι συναρτήσεις. Κατά συνέπεια, για εκείνο το διάστημα [0,h) τιμών του g_c όπου οι *χ(.)* και *ψ(.)* έχουν θετικές τιμές, και όπου h ορίζεται ως $\chi(h) \equiv 0$, η καμπύλη *ψ(.)* κείται ψηλότερα της χ(.). Επεται, τότε, ότι το σημείο τομής P της *ψ(.)* με την ευθεία των 45 μοιρών βρίσκεται ψηλότερα (και δεξιότερα) του σημείου τομής Ε της *χ(.).* Το συμπέρασμα, λοιπόν, είναι ότι για την περίπτωση όπου *Δ<(Θ-1),* ισχύει $g_c^o > g_c^*$. Η περίπτωση αυτή αναπαρίσταται γραφικά στο Διάγραμμα 7.5



Διάγραμμα 7.4



Διάγραμμα 7.5

Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτει ότι, ασχέτως των τιμών των εξωγενών παραμέτρων, ο μακροχρόνιος ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης που επιτυγχάνεται μέσω του μηχανισμού της αγοράς είναι μικρότερος του άριστου κατά

Pareto, ήτοι $g_c^* < g_c^0$. Επεται ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο που κατανέμει ο μηχανισμός της αγοράς στην έρευνα είναι μικρότερο του αρίστου, ήτοι του H_A^0 . Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για την πραγματική αμοιβή του φυσικού κεφαλαίου, καθώς και για το λόγο προϊόντος - κεφαλαίου, ήτοι είναι $p_k^* < p_k^0$ και $\varphi^0 < \varphi^*$. Η αποτυχία αυτή του μηχανισμού της αγοράς πηγάζει, όπως έχουμε πει, από τις ατέλειες των αγορών και από τις εξωτερικότητες της έρευνας και γνώσης.

Κατά συνέπεια, η οικονομική πολιτική θα πρέπει να στοχεύει στην αύξηση της απασχόλησης ανθρωπίνου κεφαλαίου στον κλάδο έρευνας (R&D). Τούτο μπορεί να επιτευχθεί είτε άμεσα με την επιδότηση του ανθρωπίνου κεφαλαίου που απασχολείται στον κλάδο έρευνας (δηλαδή των blueprints), είτε με την επιδότηση του προϊόντος του ενδιάμεσου κλάδου (δηλαδή των ενδιάμεσων κεφαλαιουχικών αγαθών), από τον οποίο προκύπτει η παράγωγη ζήτηση για blueprints.