LECTURE IV:

The Basic Real Business Cycle Model

A. Literature

In this lecture we present the basic real business cycle model. A couple of classic references here are Kydland and Prescott (1982), King, Plosser, and Rebelo (1988), and King and Rebelo (2000). The model is essentially just the Neoclassical Growth model augmented to have variable labor supply. We consider again the Neoclassical Growth Model, introduced in Lecture I in a deterministic set up and extended in Lecture II in a stochastic set up.

B. Model

Consider the Cass-Koopmans version of the Stochastic Neoclassical Growth Model presented in Lecture II, where the temporal utility function, now, is given by:

$$u(c_t, l_t) = \frac{(c_t^{\gamma} l_t^{1-\gamma})^{1-\sigma}}{1-\sigma}; \gamma \in (0,1) \,\&\, \sigma \in (0,\infty) \tag{IV.1}$$

where l_t stands for time devoted to leisure in period t. This is a constant relative risk aversion utility function. In particular, the relative risk aversion coefficient, $-\frac{u_{cc}c}{u_c}$, is equal to σ. Parameter γ characterizes the relative preference of consumption over leisure, $\frac{u_c c}{u_l l} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Also, the time constraint, now, is:

$$h_t + l_t \leq 1$$

We assume that the probability law of θ_t a Markov Chain structure, so that:

$\Pr(\ \Pr(\theta^{t+1} \middle| \theta^t) = \Pr(\theta_{t+1} \middle| \theta_t)$

<u>Equilibrium</u>: We are interested in characterizing the equilibrium (resource allocation) of this economy. The competitive equilibrium is defined as a sequence of the form $\{(c_t(\theta^t), i_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), (k_t(\theta^t)), (K_t(\theta^t), L_t(\theta^t), Y(\theta^t)_t), (r_t(\theta^t), w_t(\theta^t), d_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$, such that:

(I) Given $\{(r_t(\theta^t), w_t(\theta^t), d_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$, $\{(c_t(\theta^t), i_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), (k_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ is a solution to the representative households, problem. That is, $\{(c_t(\theta^t), i_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), (k_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ is a solution to :

$$\max_{\{(c_t(\theta^t), i_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), (k_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}} E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t) \middle| \theta_0] \tag{IV.2}$$

subject to:

$$\mathrm{c}_t(\theta^t) + i_t(\theta^t) \le r_t(\theta^t) k_t(\theta^t) + w_t(\theta^t) h_t(\theta^t) + d_t(\theta^t) \tag{IV.3}$$

$$k_{t+1}(\theta^t) = (1-\delta) k_t(\theta^t) + i_t(\theta^t) \tag{IV.4}$$

$$h_t(\theta^t) + l_t(\theta^t) \le 1 \tag{IV.5}$$

$$c_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), k_{t+1}(\theta^t) \ge 0 \tag{IV.6}$$

$$(k_o, \theta_0) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ given} \tag{IV.7}$$

(II) Given $\{(r_t(\theta^t), w_t(\theta^t), d_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$, $\{(K_t(\theta^t), L_t(\theta^t), Y(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ is a solution to the representative firm's, problem. That is, $(K_t(\theta^t), L_t(\theta^t), Y(\theta^t))$ is a solution to :

$$\max_{(K_t(\theta^t), L_t(\theta^t), Y(\theta^t))} \quad Y_t(\theta^t) - r_t(\theta^t)K_t(\theta^t) - w_t(\theta^t)L_t(\theta^t) \tag{IV.8}$$

subject to:

$$Y_t(\theta^t) \leq \theta_t K_t(\theta^t)^{\alpha}[z_t L_t(\theta^t)]^{1-a} \tag{IV.9}$$

$$K_t(\theta^t), L_t(\theta^t), Y_t(\theta^t) \geq 0 \tag{IV.10}$$

for all $t \in \mathbb{N}_+$.

(III) Given $\{(r_t(\theta^t), w_t(\theta^t), d_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ and $\{(c_t(\theta^t), i_t(\theta^t), l(\theta^t), h(\theta^t), (k_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ prices $\{(r_t(\theta^t), w_t(\theta^t), d_t(\theta^t))\}_{t=0}^{\infty}$ clear all markets. That is,

$$\begin{aligned} n_t h_t(\theta^t) &= mL_t(\theta^t) \\ n_t k_t(\theta^t) &= mK_t(\theta^t) \\ n_t y_t(\theta^t) \equiv n_t(c_t(\theta^t) + i_t(\theta^t)) &= mY_t(\theta^t) \end{aligned} \tag{IV.11}$$

where:

$$n_t d_t(\theta^t) = m\pi_t(\theta^t) \text{ and } \pi_t(\theta^t) = Y_t(\theta^t) - r_t(\theta^t)K_t(\theta^t) - w_t(\theta^t)L_t(\theta^t)$$

The fundamental question again is to solve for the competitive equilibrium. That is, to solve for the endogenous variables as functions of the exogenous ones. As in the deterministic set up, first, we facilitate this task by a number of transformations. Second, we facilitate this task by imposing the Markov chain structure on θ^t. That is,

$$\Pr(\theta^{t+1} \,|\, \theta^t) = \Pr(\theta_{t+1} \,|\, \theta_t)$$

C. Solution

a. <u>Transformation to an economy that does not grow</u>: We can express the equilibrium in terms of efficient household units by dividing all quantity variables in the model, except those that are expressed as percentages (i.e., h_t and l_t), by $n_t z_t$. To avoid introducing new notation, hereafter, we shall continue denote the pertinent variables after they have been divided by $n_t z_t$ by the same symbol. For example, thereafter c_t denotes c_t as defined above, divided by $n_t z_t$. Then, in order to represent the equilibrium as above in terms of the divided variables, we need the following transformations:

<u>(i)</u> Thereafter, the discount rate β stands for the discount rate β as defined above, multiplied by $[(1+g_n)(1+g_z)]^{\gamma(1-\sigma)}$.

<u>(ii)</u> Thereafter, the real wage rate w_t stands for the real wage rate w_t as defined above, divided by $n_t z_t$.

<u>(iii)</u> Thereafter, dividends d_t stand for dividends d_t as defined above, divided by $n_t z_t$.

<u>(iv)</u> Thereafter, the capital stock transition equation (IV.4) is replaced by:

$$(1+g_n)\,(1+g_z)\;k_{t+1}(\theta^t) = (1-\delta)k_t(\theta^t) + i_t(\theta^t) \qquad \text{(IV.4)}$$

<u>(v)</u> Thereafter, the profits function and the production technology constraint are replaced by:

$$\pi_t(\theta^t) = y_t(\theta^t) - r_t(\theta^t)k_t(\theta^t) - w_t(\theta^t)h_t(\theta^t)$$

$$y_t(\theta^t) \le \theta_t F[k_t(\theta^t), h_t(\theta^t)] = \theta_t k_t(\theta^t)^\alpha h_t(\theta^t)^{1-a}, \tag{IV.9}$$

respectively. It is interesting to note that the economy that corresponds to the new variables does not grow.

b. Irrelevance of inequality constraints: The fact that the temporal utility function defined in (IV.1) is strictly increasing in c_t implies that the budget constraint (IV.3) cannot be satisfied with strict inequality in the equilibrium. Likewise, the fact that the temporal utility function is strictly increasing in l_t implies that the time constraint (IV.5) cannot be satisfied with strict inequality in the equilibrium. Further, since k_o = 0, in view of the production function (IV. 9) implies that the economy is perpetually characterized by zero output, consumption, investment and capital, this case is uninteresting. But, with $k_o > 0$, the fact that the the temporal utility function is strictly increasing in c_t iand satisfies the Inada condition, $u_c \to +\infty \ as \ c \to 0$, implies that the physical constraint $c_t = 0$ cannot be satisfied in equilibrium. Clearly then, the same is also true for the $l_t = 0$ constraint. Also, the production function constraint cannot be satisfied with strict inequality, since profits are strictly increasing in output. The latter and the fact that the production function is strictly increasing in L_t and satisfies the Inada condition $F_L \to +\infty \ as \ L \to 0$ and in view of the labor market clearing condition, (IV.11), $h_t = 0$ cannot be satisfied in equilibrium. And clearly, the same reasoning applies to the $k_{t+1} = 0$ constraint. Hence, assuming that $k_o > 0$, we may look for a solution to the equilibrium problem ignoring all physical constraints and taking the budget, time, and production technology constraints to be satisfied with equality.

c. The Firm's Problem: The solution to the representative firm's problem is characterized by:

$$y_t(k_t, h_t, \theta_t) = \theta_t F(k_t, h_t) = \theta_t k_t^{\alpha} h_t^{1-a} \tag{IV.12}$$

$$\theta_t F_K(k_t, h_t) = \alpha \frac{y_t}{k_t} = r_t \tag{IV.13}$$

$$\theta_t F_L(k_t, h_t) = (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t} = w_t \tag{IV.14}$$

d. The Household's Problem: Since WLOG consumption and leisure can be written as:

$$c_t = (1-\delta)k_t + r_t k_t + w_t h_t - (1+g_n)(1+g_z)k_{t+1} \tag{IV.15}$$

and

$$l_t = 1 - h_t \tag{IV.16}$$

the household's problem becomes:

$$\max_{\{k_{t+1}(\theta^t),\, h_t(\theta^t)\}_{t=0}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left\{\begin{matrix}(1-\delta)k_t(\theta^{t-1}) + r_t(\theta^t)k_t(\theta^{t-1}) + w_t(\theta^t)h_t(\theta^t) - \\ -(1+g_n)(1+g_z)k_{t+1}(\theta^t),\, 1-h_t(\theta^t)\end{matrix}\right\}\middle|\theta_0\right\} \tag{IV.17}$$

Given the Markov chain probability structure, the Euler conditions associated with this problem are:

$$u_c\left(c\ (\theta_t), l_t\ (\theta_t)\right)\left[-(1+g_n)(1+g_z)\right]+$$
$$+\beta E\left\{u_c\left(c(\theta_{t+1}), l_{t+1}(\theta_{t+1})\right)[(1-\delta)+r_{t+1}(\theta_{t+1})\middle|\theta_t\right\}=0 \tag{IV.18}$$

$$u_c\left(c_t\ (\theta_t), l_t\ (\theta_t)\right)w_t(\theta_t)-u_l\left(c_t\ (\theta_t), l_t\ (\theta_t)\right)=0 \tag{IV.19}$$

$\forall t\in\mathbb{N}_+$

And, the Transversality condition is:

$$\beta^T E\left[u_c\left(c_T(\theta_T), l_T(\theta_T)\right)k_{T+1}(\theta_T)\middle|\theta_0\right]\to 0\ as\ T\to\infty \tag{IV.20}$$

Note, that given the strict concavity of the temporal utility function and the non-negativity of consumption, these conditions are also sufficient.

e. <u>The Equilibrium Laws of Motion:</u> In view of the specific form of the temporal utility function and summarizing results, we can write the system of equations that describe the competitive equilibrium, without prices, as follows:

$$c_t=(1-\delta)k_t+y_t-(1+g_n)(1+g_z)k_{t+1} \tag{IV.21}$$

$$y_t=\theta_t k_t^{\alpha} h_t^{1-a} \tag{IV.22}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)(\frac{1-h_t}{h_t})=\frac{c_t}{y_t} \tag{IV.23}$$

$$(1+g_n)(1+g_n)=\beta E[\frac{u_t c_{t+1}}{u_{t+1}c_t}(1-\delta+\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}})|\theta_t] \tag{IV.24}$$

$$i_t=(1+g_n)(1+g_z)k_{t+1}-(1-\delta)k_t \tag{IV.25}$$

Equation (IV.21) is the household budget constraint. Equation (IV.22) is the production function. Equation (IV.23) is the Euler condition with respect to labor (IV.19) that collapses into a temporal condition, implying that the MRS of consumption for leisure is equal to the wage rate and hence the marginal product of labor. Equation (IV.24) is the Euler condition with respect to next period's capital (IV.18) that equates the current value of capital not consumed to the discounted expected value of this capital consumed next period. Finally, note that equation (IV.25) is the capital transition equation. The solution of this system of equations is a system of the form:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= k(k_t, \theta_t) \\
h_t &= h(k_t, \theta_t) \\
y_t &= y(k_t, \theta_t) \\
c_t &= c(k_t, \theta_t) \\
i_t &= i(k_t, \theta_t)
\end{aligned}
$$

for (k_o, θ_0) given, that satisfies the Transversality condition:

$$\beta^T E[\frac{u_T(\theta_T)}{c_T(\theta_T)} k_{T+1}(\theta_T) | \theta_0] \rightarrow 0 \; as \; T \rightarrow \infty$$

This, of course, requires to be specific about the probability law of the Markov chain θ_t.

C. Approximation and Numerical Solution

Henceforth in this lecture, we change notation and the total factor productivity variable, θ_t, is denoted by A_t; the gross growth rate of the Harrod-Domar technology parameter, $(1+g_z)$, is denoted by γ_z; and, there is no population growth (i.e., $g_n = 0$).

As mentioned in Lecture II, equation systems such as (IV.21) – (IV.25) cannot be solved analytically. We shall proceed instead with numerical analysis, that necessitates to compute an approximate solution. The approximation takes place around a deterministic steady state such as the one we studied in Lecture I, that we know it exists for this model.

• H state { A_t }, (TFP-total factor productivity), υποθέτουμε ότι εξελίσσεται σαν ένα Random Walk with Drift:

$$\ln A_{t+1} = (1-\rho)\ln \overline{A} + \rho \ln A_t + \varepsilon_{t+1} \Rightarrow \ln \frac{A_{t+1}}{\overline{A}} = \rho \ln \frac{A_t}{\overline{A}} + \varepsilon_{t+1}, \text{ όπου } \varepsilon_{t+1} \sim \text{IID } N(0,\sigma_A^2).$$

Προκειμένου να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα που περιγράφουν οι εξισώσεις **(I)-(V)**, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

I. <u>Βρίσκουμε το σημείο σταθερής κατάστασης, (steady-state):</u>

Λύνουμε τις εξισώσεις **(I)-(V)** χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι χρονικοί δείκτες:

(I^*): $c = [(1-\delta+\alpha \frac{y}{k}) - \gamma_N \gamma_z]k + (1-\alpha)y$

(II^*): $y = Ak^{\alpha} h^{1-\alpha}$

(III^*): $\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\left(\frac{1-h}{h}\right) = \frac{c}{y}$

(IV^*): $\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} = \beta\left(1-\delta+\alpha \frac{y}{k}\right)$

(V^*): $i = -(1-\delta-\gamma_N \gamma_Z)k$

Οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι : $\{c, y, k, h, i\}$.

Σημειώστε ότι πιο κάτω, στην διαδικασία του calibration, στο ίδιο ακριβώς σύστημα (I*)-(V*) αντικαθιστούμε τις μεταβλητές $\{c, y, k, h, i\}$ με τους μέσους όρους που προκύπτουν από τα δεδομένα (data) και θεωρούμε ως αγνώστους τις παραμέτρους.

<u>**II**. Κάνουμε log-linearization του συστήματος:</u>

Η απλή γραμμικοποίηση για μία συνάρτηση 2 μεταβλητών γίνεται σύμφωνα με:

$$f(x,y) \cong f(x^*,y^*) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\substack{evaluated\\ at\{x^*,y^*\}}} (x-x^*) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\substack{evaluated\\ at\{x^*,y^*)}} (y-y^*)$$

Η log-linearization συνίσταται στη γραμμικοποίηση ως προς τους λογαρίθμους των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, έστω η συνάρτηση f την οποία γράφουμε ως :

$$f(x,y) = f(e^{\ln x}, e^{\ln y})$$

Στη συνέχεια, τη γραμμικοποιούμε ως προς τους λογαρίθμους *lnx* και *lny* :

$$f(x,y) \cong f(x^*,y^*) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \ln x}}_{\substack{evaluated\\ at\{x^*,y^*\}}}(\ln x - \ln x^*) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \ln y}}_{\substack{evaluated\\ at\{x^*,y^*\}}}(\ln y - \ln y^*)$$

Οι διαφορές $(\ln x - \ln x^*)$ και $(\ln y - \ln y^*)$ δείχνουν τις ποσοστιαίες αποκλίσεις των μεταβλητών {*x*,*y*} από το σημείο σταθερής κατάστασης.

Για την εξίσωση $c_t = (1-\delta+\alpha\frac{y_t}{k_t})k_t - \gamma_N\gamma_z k_{t+1} + (1-\alpha)y_t$ (I) έχουμε:

$$\begin{aligned}
& f(c_t, y_t, k_t, k_{t+1}) = c_t - (1-\delta)k_t - \alpha y_t + \gamma_N\gamma_z k_{t+1} - (1-\alpha)y_t \\
& = e^{\ln c_t} - (1-\delta)e^{\ln k_t} - \alpha e^{\ln y_t} + \gamma_N\gamma_z e^{\ln k_{t+1}} - (1-a)e^{\ln y_t} \\
& = e^{\ln c_t} - (1-\delta)e^{\ln k_t} + \gamma_N\gamma_z e^{\ln k_{t+1}} - e^{\ln y_t} \\
& \cong \left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_t}\right|_{c,k,y} (\ln c_t - \ln c) \left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_t}\right|_{c,k,y} (\ln k_t - \ln k) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_{t+1}}\right|_{c,k,y} (\ln k_{t+1} - \ln k) + + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_t}\right|_{c,k,y} (\ln y_t - \ln y) \\
& \cong e^{\ln c}\hat{c}_t - (1-\delta)e^{\ln k}\hat{k}_t + \gamma_N\gamma_z e^{\ln k}\hat{k}_{t+1} - e^{\ln y}\hat{y}_t \\
& \cong c\hat{c}_t - (1-\delta)k\hat{k}_t + \gamma_N\gamma_z k\hat{k}_{t+1} - y\hat{y}_t = 0 \Leftrightarrow \\
& \boxed{\frac{c}{y}\hat{c}_t - (1-\delta)\frac{k}{y}\hat{k}_t + \gamma_N\gamma_z\frac{k}{y}\hat{k}_{t+1} - \hat{y}_t = 0}
\end{aligned}$$

Για την εξίσωση $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$ (II) έχουμε:

$$f(y_t,k_t,h_t)=y_t-A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$
$$=e^{\ln y_t}-e^{\ln A_t}e^{a\ln k_t}e^{(1-\alpha)\ln h_t}$$
$$\cong \left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_t}\right|_{h,k,y}(\ln y_t-\ln y)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln A_t}\right|_{h,k,y}(\ln A_t-\ln A)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_t}\right|_{h,k,y}(\ln k_t-\ln k)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_t}\right|_{h,k,y}(\ln h_t-\ln h)$$
$$\cong e^{\ln y}\hat{y}_t-e^{\ln A}e^{a\ln k}e^{(1-\alpha)\ln h}\hat{A}_t-ae^{\ln A}e^{a\ln k}e^{(1-\alpha)\ln h}\hat{k}_t-(1-a)e^{\ln A}e^{a\ln k}e^{(1-\alpha)\ln h}\hat{h}_t \xrightarrow{e^{\ln y_t}=e^{\ln A_t}e^{a\ln k_t}e^{(1-\alpha)\ln h_t}}$$
$$e^{\ln y}\hat{y}_t-e^{\ln y}\hat{A}_t-ae^{\ln y}\hat{k}_t-(1-a)e^{\ln y}\hat{h}_t=0\Leftrightarrow$$
$$\boxed{\hat{y}_t-\hat{A}_t-a\hat{k}_t-(1-a)\hat{h}_t=0}$$

Για την εξίσωση $\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\left(\frac{1-h_t}{h_t}\right)=\frac{c_t}{y_t}$ (III) έχουμε:

$$f(c_t,h_t,y_t)=\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1-h_t}{h_t}-\frac{c_t}{y_t}=\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1-e^{\ln h_t}}{e^{\ln h_t}}-\frac{e^{\ln c_t}}{e^{\ln y_t}}$$
$$\cong \left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_t}\right|_{c,h,y}(\ln h_t-\ln h)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_t}\right|_{c,h,y}(\ln c_t-\ln c)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_t}\right|_{c,h,y}(\ln y_t-\ln y)$$
$$\cong \frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\left.\frac{-e^{\ln h_t}e^{\ln h_t}-e^{\ln h_t}(1-e^{\ln h_t})}{e^{2\ln h_t}}\right|_{c,h,y}\hat{h}_t-\left.\frac{e^{\ln c_t}}{e^{\ln y_t}}\right|_{c,h,y}\hat{c}_t+\left.\frac{e^{\ln c_t}}{e^{\ln y_t}}\right|_{c,h,y}\hat{y}_t$$
$$\cong -\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1}{h}\hat{h}_t-\frac{c}{y}\hat{c}_t+\frac{c}{y}\hat{y}_t=0\xrightarrow{\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1-h}{h}=\frac{c}{y}}$$

$$-\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1}{h}\hat{h}_t-\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1-h}{h}\hat{c}_t+\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\frac{1-h}{h}\hat{y}_t=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\hat{c}_t-\hat{y}_t+\frac{1}{1-h}\hat{h}_t=0}$$

Η $E_t\{\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}\frac{c_{t+1}}{c_t}=\beta\frac{U_{t+1}}{U_t}\left(1-\delta+\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}\right)\}$ **(IV),** λαμβάνοντας υπόψη τη CRRA συνάρτηση χρησιμότητας (και αγνοώντας το E), γίνεται:

$$\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta \frac{\left[{c_{t+1}}^{\gamma} \left(1-h_{t+1}\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}}{\left[{c_t}^{\gamma} \left(1-h_t\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}} \left(1-\delta+\alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}\right)$$

Επομένως,

$$f(c_t, c_{t+1}, h_t, h_{t+1}, k_{t+1}, y_{t+1}) = \gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} \frac{c_{t+1}}{c_t} - \beta \frac{\left[{c_{t+1}}^{\gamma} \left(1-h_{t+1}\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}}{\left[{c_t}^{\gamma} \left(1-h_t\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}} \left(1-\delta+\alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}}\right)$$

$$= \gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} \frac{e^{\ln c_{t+1}}}{e^{\ln c_t}} - \beta \frac{\left[e^{\gamma \ln c_{t+1}} \left(1-e^{\ln h_{t+1}}\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}}{\left[e^{\gamma \ln c_t} \left(1-e^{\ln h_t}\right)^{1-\gamma} \right]^{1-\sigma}} \left(1-\delta+\alpha \frac{e^{\ln y_{t+1}}}{e^{\ln k_{t+1}}}\right)$$

$$\cong \left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_t}\right|_{c,h,y,k} (\ln c_t - \ln c) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_{t+1}}\right|_{c,h,y,k} (\ln c_{t+1} - \ln c) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_t}\right|_{c,h,y,k} (\ln h_t - \ln h)$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_{t+1}}\right|_{c,h,y,k} (\ln h_{t+1} - \ln h) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_{t+1}}\right|_{c,h,y,k} (\ln y_{t+1} - \ln y) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_{t+1}}\right|_{c,h,y,k} (\ln k_{t+1} - \ln k)$$

Αναλυτικά,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_t}\right|_{c,h,k,y}(\ln c_t - \ln c) =$$

$$= \left\{ -\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} \frac{e^{\ln c}}{e^{\ln c}} - \beta \frac{\left[e^{\gamma \ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}{\left[e^{\gamma \ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}} \left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\left[-\gamma(1-\sigma)\right] \right\} \hat{c}_t =$$

$$= \left[-\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} + \beta\gamma(1-\sigma)\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\right]\hat{c}_t$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_{t+1}}\right|_{c,h,k,y}(\ln c_{t+1} - \ln c) = \left\{ \gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} \frac{e^{\ln c}}{e^{\ln c}} - \beta \frac{\left[e^{\gamma \ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}{\left[e^{\gamma \ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}} \left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\gamma(1-\sigma) \right\} \hat{c}_{t+1}$$

$$= \left[\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} - \beta\gamma(1-\sigma)\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\right]\hat{c}_{t+1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_t}\right|_{c,h,k,y}(\ln h_t - \ln h) =$$

$$= \left\{ -\beta \frac{\left[e^{\gamma \ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}{e^{\gamma(1-\sigma)\ln c}} \left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\left[\left(1-\gamma\right)(1-\sigma)\left(1-e^{\ln h}\right)^{-(1-\sigma)(1-\gamma)-1} e^{\ln h}\right] \right\} \hat{h}_t =$$

$$= -\beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\left(1-\gamma\right)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_t$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_{t+1}}\right|_{c,h,k,y}(\ln h_{t+1}-\ln h)=$$

$$=\left\{-\beta\frac{e^{\gamma(1-\sigma)\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{(1-\sigma)(1-\gamma)-1}\left(1-\gamma\right)(1-\sigma)\left(-e^{\ln h}\right)}{\left[e^{\gamma\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}\left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\right\}\hat{h}_{t+1}=$$

$$=\beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\left(1-\gamma\right)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_{t+1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_{t}}\right|_{c,h,k,y}(\ln y_{t}-\ln y)=\left\{-\beta\frac{\left[e^{\gamma\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}{\left[e^{\gamma\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}\left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\right\}\hat{y}_{t}=-\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{y}_{t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_{t+1}}\right|_{c,h,k,y}(\ln k_{t+1}-\ln k)=\left\{\beta\frac{\left[e^{\gamma\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}{\left[e^{\gamma\ln c}\left(1-e^{\ln h}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\sigma}}\left(1-\delta+\alpha\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln k}}\right)\right\}\hat{k}_{t+1}=\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{k}_{t+1}$$

Κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$f(c_t,c_{t+1},h_t,h_{t+1},k_{t+1},y_{t+1})\cong$$

$$\cong\left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_{t}}\right|_{c,h,y,k}(\ln c_t-\ln c)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln c_{t+1}}\right|_{c,h,y,k}(\ln c_{t+1}-\ln c)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_{t}}\right|_{c,h,y,k}(\ln h_t-\ln h)+$$

$$+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln h_{t+1}}\right|_{c,h,y,k}(\ln h_{t+1}-\ln h)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln k_{t+1}}\right|_{c,h,y,k}(\ln k_{t+1}-\ln k)+\left.\frac{\partial f}{\partial \ln y_{t+1}}\right|_{c,h,y,k}(\ln y_{t+1}-\ln y)=$$

$$=\left[-\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}+\beta\gamma(1-\sigma)\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\right]\hat{c}_t+\left[\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}-\beta\gamma(1-\sigma)\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)\right]\hat{c}_{t+1}$$

$$-\beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)(1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_t$$

$$+\beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)(1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_{t+1}$$

$$-\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{y}_{t+1}+\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{k}_{t+1}=0\xrightarrow{\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}=\beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)}$$

$$\left[-\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}+\gamma(1-\sigma)\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}\right]\hat{c}_t+\left[\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}-\gamma(1-\sigma)\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}\right]\hat{c}_{t+1}$$

$$-\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}(1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_t$$

$$+\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)}(1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_{t+1}-\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{y}_{t+1}+\beta\alpha\frac{y}{k}\hat{k}_{t+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered}-\left[1-\gamma(1-\sigma)\right]\hat{c}_t+\left[1-\gamma(1-\sigma)\right]\hat{c}_{t+1}-(1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_t+\\ (1-\gamma)(1-\sigma)\frac{h}{1-h}\hat{h}_{t+1}-\frac{\alpha\frac{y}{k}}{1-\delta+\alpha\frac{y}{k}}\hat{y}_{t+1}+\frac{\alpha\frac{y}{k}}{1-\delta+\alpha\frac{y}{k}}\hat{k}_{t+1}=0\end{gathered}}$$

Για την εξίσωση $i_t=\gamma_N\gamma_Z k_{t+1}-(1-\delta)k_t$ **(V)** έχουμε:

$$f(i_t,k_{t+1},k_t)=i_t-\gamma_N\gamma_Z k_{t+1}+(1-\delta)k_t$$
$$=e^{\ln i_t}-\gamma_N\gamma_Z e^{\ln k_{t+1}}+(1-\delta)e^{\ln k_t}$$
$$\cong\left.\frac{\partial f}{\partial\ln i_t}\right|_{i,k}(\ln i_t-\ln i)+\left.\frac{\partial f}{\partial\ln k_{t+1}}\right|_{i,k}(\ln k_{t+1}-\ln k)+\left.\frac{\partial f}{\partial\ln k_t}\right|_{i,k}(\ln k_t-\ln k)$$
$$=e^{\ln i}\hat{i}_t-\gamma_N\gamma_Z e^{\ln k}\hat{k}_{t+1}+(1-\delta)e^{\ln k}\hat{k}_t$$
$$=i\hat{i}_t-\gamma_N\gamma_Z k\hat{k}_{t+1}+(1-\delta)k\hat{k}_t=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{i}{k}\hat{i}_t=\gamma_N\gamma_Z\hat{k}_{t+1}-(1-\delta)\hat{k}_t}$$

[Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι οι μεταβλητές μετατρέπονται σε μονάδες αποτελεσματικής εργασίας σύμφωνα με τον τύπο: $x = \frac{X}{zN}$, όπου $x = \{y, c, k, i\}$], με εξαίρεση την εργασία όπου $h = \frac{H}{N}$, όπου N = το σύνολο του πληθυσμού..

Μετά τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων καταλήγουμε σε ένα στοχαστικό σύστημα εξισώσεων διαφορών, το οποίο επιλύουμε με μία μέθοδο που επιλέγουμε. Το σύστημα αυτό είναι εκφρασμένο σε ποσοστιαίες αποκλίσεις από το steady state. Δηλαδή, ,

$$\hat{x}_t = \left(\ln x_t - \ln x^{SS}\right),\ x_t = \frac{X_t}{z_t N_t},\ x_t = \{y_t, c_t, k_t, i_t\} \text{ και}$$

$$\hat{h}_t = \left(\ln h_t - \ln h^{SS}\right),\ h_t = \frac{H_t}{N_t}$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε καταλήξει στα ακόλουθα:

Η συνθήκη πρώτης τάξης ως προς την εργασία περιλαμβάνει τις μεταβλητές: $(\hat{h}_t, \hat{c}_t, \hat{y}_t)$

Η Euler περιλαμβάνει τις: $(\hat{h}_t, \hat{c}_t, \hat{k}_t)$ και τις : $(\hat{h}_{t+1}, \hat{c}_{t+1}, \hat{y}_{t+1}, \hat{k}_{t+1})$

Ο resource constraint περιλαμβάνει τις: $(\hat{h}_t, \hat{c}_t, \hat{y}_t, \hat{k}_t, \hat{k}_{t+1})$

Η συνάρτηση παραγωγής περιλαμβάνει τις: $(\hat{h}_t, \hat{c}_t, \hat{y}_t, \hat{A}_t)$

Η συνάρτηση επενδύσεων περιλαμβάνει τις: $(\hat{i}_t, \hat{k}_t, \hat{k}_{t+1})$

Τα παραπάνω μπορούμε να τα γράψουμε με τη μορφή πινάκων ως ακολούθως:

$$E\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_N\gamma_Z\dfrac{k}{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\gamma(1-\sigma) & (1-\gamma)(1-\sigma)\dfrac{h}{1-h} & -\dfrac{\alpha y/k}{1-\delta+\alpha y/k} & 0 & \dfrac{\alpha y/k}{1-\delta+\alpha y/k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_N\gamma_Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{c}_{t+1}\\ \hat{h}_{t+1}\\ \hat{y}_{t+1}\\ \hat{i}_{t+1}\\ \hat{k}_{t+1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{c}{y} & 0 & -1 & 0 & -(1-\delta)\dfrac{k}{y} \\ 0 & -(1-\alpha) & 1 & 0 & -\alpha \\ 1 & \dfrac{1}{1-h} & -1 & 0 & 0 \\ -[1-\gamma(1-\sigma)] & -(1-\gamma)(1-\sigma)\dfrac{h}{1-h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{i}{k} & 1-\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{c}_t\\ \hat{h}_t\\ \hat{y}_t\\ \hat{i}_t\\ \hat{k}_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\hat{A}_t\right\} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Έχουμε έξι μεταβλητές: (*h*, *c*, *y*, *k*, *i*) και *A*, οι οποίες είναι εκφρασμένες σε αποκλίσεις από το steady-state.

Τις διακρίνουμε σε states και controls:

Οι states μπορεί να είναι είτε εξωγενείς είτε ενδογενείς,

Οι controls είναι μόνο ενδογενείς.

Η λύση που θα προκύψει θα είναι συναρτήσει των states:

$$\hat{h}_t = h(\hat{k}_t, \hat{A}_t)$$
$$\hat{c}_t = c(\hat{k}_t, \hat{A}_t)$$
$$\hat{y}_t = y(\hat{k}_t, \hat{A}_t)$$
$$\hat{i}_t = i(\hat{k}_t, \hat{A}_t)$$
$$\hat{k}_{t+1} = k(\hat{k}_t, \hat{A}_t)$$

Calibration (Διαμέτρηση):

Στη διαδικασία του calibration δίνουμε τιμές στις παραμέτρους του υποδείγματος, οι οποίες είναι συνεπείς με τη μακροχρόνια συμπεριφορά της πραγματικής οικονομίας.

Οι παράμετροι του υποδείγματος που μας ενδιαφέρει είναι οι ακόλουθες:
$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \gamma_z\}$ και $\{\rho, \sigma_A\}$.
Υποθέτουμε ότι η άγνωστη σειρά για τη μεταβλητή A_t ακολουθεί μια διαδικασία AR(1) στους λογαρίθμους, (χρησιμοποιούμε λογαρίθμους γιατί αφενός οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε είναι log-linear και αφετέρου γιατί η συνάρτηση *f*(X)=lnX εμφανίζει λιγότερη μεταβλητότητα από τη συνάρτηση *g*(X)=X).
Δηλαδή, η A_t ακολουθεί: $\ln A_{t+1} - \ln A_t = \rho(\ln A_t - \ln A) + \varepsilon_{t+1}$, όπου $\varepsilon_{t+1} \sim$ IID $N(0, \sigma_A^2)$.
Οι διαταραχές που θα εισαχθούν (shocks) θα μοιάζουν με αυτές της πραγματικής οικονομίας, ενώ θα επιλεγεί αυτή η τεχνητή σειρά για το Y η οποία θα έχει τυπική απόκλιση ίδια με αυτή της πραγματικής σειράς για το Y. Αντίστοιχα, θα επιλεγεί αυτή η τεχνητή σειρά για το Y η οποία θα εμφανίζει το ίδιο persistence, (ίδιο ρ), με την πραγματική σειρά του Y.

Οι εξισώσεις του υποδείγματός μας στο steady-state είναι:

(I^*): $c = [(1-\delta + \alpha \frac{y}{k}) - \gamma_N \gamma_z]k + (1-\alpha)y$

(II^*): $y = Ak^{\alpha} h^{1-\alpha}$

(III^*): $\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\alpha)\left(\frac{1-h}{h}\right) = \frac{c}{y}$

(IV^*): $\gamma_Z^{1-\gamma(1-\sigma)} = \beta\left(1-\delta+\alpha\frac{y}{k}\right)$

(V^*): $i = -(1-\delta-\gamma_N\gamma_Z)k$

Οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι : $\{c, y, k, h, i\}$.

Συνήθως, μας ενδιαφέρει να εξετάζουμε τα "great ratios" σε μια οικονομία, που συνοψίζουν τα μακροχρόνια χαρακτηριστικά της. Οι λόγοι αυτοί είναι οι C/Y, K/Y, H/Y, οι οποίοι εμφανίζονται σταθεροί στο χρόνο και αποτυπώνουν τα "stylized facts" μιας οικονομίας, (βλ. χαρακτηριστικά του Kaldor).

Στο σύστημα εξισώσεων που καταλήγουμε $\left[\left(I^*\right)-\left(V^*\right)\right]$, θέλουμε να εμφανίσουμε τα "great ratios", τα οποία θα αντικαταστήσουμε με τους μέσους όρους από τα δεδομένα της πραγματικής οικονομίας. Με τον τρόπο αυτό, οι μόνοι άγνωστοι θα είναι οι τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος.

Συνοψίζοντας τη διαδικασία του calibration μέχρι αυτό το σημείο:

- Γράφουμε το υπόδειγμα στο steady-state.
- Το τροποποιούμε κατάλληλα με στόχο να εμφανίσουμε τα "great ratios".
- Αντικαθιστούμε τα "great ratios" με τους μέσους όρους από τα δεδομένα μας.
- Βρίσκουμε τιμές για τις παραμέτρους τέτοιες ώστε να είναι συμβατές με τη μακροχρόνια συμπεριφορά της οικονομίας.

Προκειμένου να εμφανιστούν τα "great ratios" στις εξισώσεις $\left[\left(I^*\right)-\left(V^*\right)\right]$, διαιρούμε τις I^*, II^* και V^* με y:

(I^*): $$\frac{c}{y}=[(1-\delta+\alpha\frac{y}{k})-\gamma_N\gamma_z]\frac{k}{y}+(1-\alpha)$$

(II^*): $$1=A\left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha}\left(\frac{h}{y}\right)^{1-\alpha}$$

(V^*): $$\frac{i}{y}=-(1-\delta-\gamma_N\gamma_Z)\frac{k}{y}$$

Οι εξισώσεις (III^*) και (IV^*) εμφανίζουν τα "great ratios".

<u>Μία ενδεικτική διαμέτρηση</u>

Από τα στατιστικά στοιχεία βρίσκουμε τις σειρές για τις μεταβλητές $\{ Y, I, K, C, H, N \}$.
Η τιμή της παραμέτρου γ_z υποθέτουμε ότι προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τον ρυθμό ανάπτυξης του προϊόντος των ΗΠΑ, ο οποίος είναι περίπου 2%.

[Υπενθυμίζουμε ότι η γ_z είναι ο ακαθάριστος ρυθμός αύξησης της τεχνολογικής προόδου και ακολουθεί $z_{t+1} = \gamma_z z_t, \quad \gamma_z > 1$].

Η σειρά για το κεφάλαιο (K) μπορεί να υπολογιστεί από τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου: $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$, και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν υπάρχουν δεδομένα για τον λόγο $\left(\frac{k}{y}\right)$, τότε το $\delta = \frac{i/y}{k/y} + \gamma_N \gamma_Z - 1$.

(ii) Αν δεν υπάρχουν δεδομένα για τον λόγο $\left(\frac{k}{y}\right)$, τότε υποθέτουμε μία συγκεκριμένη τιμή για το δ και κατά συνέπεια ο λόγος $\left(\frac{k}{y}\right)$ λαμβάνει τη συγκεκριμένη τιμή:

$$\frac{k}{y} = -\frac{i/y}{(1-\gamma_N \gamma_Z - \delta)}.$$

Η παράμετρος γ στην CRRA συνάρτηση χρησιμότητας προσεγγίζεται από τη μεταβλητή h. Θέτουμε, δηλαδή, $\gamma = h$.

Στην παράμετρο σ δίνουμε την τιμή 2. Θεωρούμε ότι τα άτομα είναι risk-averters.

Την τιμή της παραμέτρου β την υπολογίζουμε από την εξίσωση (IV^*):

$\beta = \gamma_z^{1-\gamma(1-\sigma)} \dfrac{1}{1-\delta+\dfrac{\alpha}{k/y}}$, η οποία προσδιορίζει και το επιτόκιο που υπονοείται στο steady-state.

[Εναλλακτικά, μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράμετρο β από τη σχέση: $\beta = \dfrac{1}{1+r}$].

Αν δεν υπάρχουν στατιστικά δεδομένα για τις ώρες εργασίας, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια σειρά ως εξής: $H = (1-u)E\dfrac{40}{7\times 14}$,

όπου: H = το ποσοστό του χρόνου που αφιερώνεται στην απασχόληση

u = το ποσοστό ανεργίας

E = το εργατικό δυναμικό

Τέλος, η μεταβλητή h υπολογίζεται ως: $h = \dfrac{H}{N}$, όπου N = το σύνολο του πληθυσμού.

Οι τιμές των παραμέτρων πρέπει να είναι συνεπείς με τα “great ratios” και με τις άλλες τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος.

Από τη σχέση: $1 = A\left(\dfrac{k}{y}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{h}{y}\right)^{1-\alpha}$ βρίσκουμε το A.

<u>Μέθοδος Κολλίντζα (JEDC 1986)</u>

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις μεταβλητές του υποδείγματος:

Ενδογενείς states: $\hat{x} = [\hat{k}]$

Εξωγενείς states: $\hat{\xi} = [\hat{A}]$

Ενδογενείς controls: $\hat{y} = [\hat{h}, \hat{c}, \hat{y}, \hat{i}\,]'$

Το διάνυσμα $\hat{x}$ περιλαμβάνει n = 1 ενδογενή state,

το διάνυσμα $\hat{\xi}$ περιλαμβάνει z = 1 εξωγενή state,

το διάνυσμα $\hat{y}$ περιλαμβάνει m = 4 controls.

Στόχος μας είναι να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων που θα είναι συνάρτηση μόνο των state variables. Δηλαδή σε ένα σύστημα της μορφής:

$E\left\{A_1\begin{bmatrix}\hat{y}_{t+1}\\ \hat{x}_{t+1}\end{bmatrix} + A_0\begin{bmatrix}\hat{y}_t\\ \hat{x}_t\end{bmatrix} + B_0\hat{\xi}\right\} = \mathrm{O}$, όπου οι διαστάσεις των πινάκων είναι:

$A_1 : (m+n)\times(m+n)$

$\begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1} \\ \hat{x}_{t+1} \end{bmatrix} : (m+n)\times 1$

$A_0 : (m+n)\times(m+n)$

$\begin{bmatrix} \hat{y}_{t} \\ \hat{x}_{t} \end{bmatrix} : (m+n)\times 1$

$B_0 : (m+n)\times z$

$\hat{\xi} : z\times 1$

$\mathrm{O} : (m+n)\times 1$

Από τη συνθήκη πρώτης τάξης ως προς την εργασία, τον resource constraint, τη συνάρτηση παραγωγής και τη συνάρτηση επενδύσεων βρίσκουμε τα ακόλουθα:

$$\hat{y}_t = \Delta_1 \hat{k}_{t+1} + \Delta_0 \hat{k}_t + \mathrm{E}\hat{\xi}_t$$

και $$\hat{y}_{t+1} = \Delta_1 \hat{k}_{t+2} + \Delta_0 \hat{k}_{t+1} + \mathrm{E}\hat{\xi}_{t+1} \quad ,$$

τις οποίες αντικαθιστούμε στη συνθήκη Euler:

$$\mathrm{M}_1 \hat{k}_{t+1} + \mathrm{M}_0 \hat{k}_t + \mathrm{N}_1 \hat{y}_{t+1} + \mathrm{N}_0 \hat{y}_t + \Lambda \hat{\xi}_t = \mathrm{O}$$

Η οποία γράφεται ως ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων διαφορών $2^{ου}$ βαθμού, συναρτήσει μόνο των state variables:

$$E\left\{A_2 \hat{x}_{t+2} + A_1 \hat{x}_{t+1} + A_0 \hat{x}_t = \mathrm{B}_1 \hat{\xi}_{t+1} + \mathrm{B}_0 \hat{\xi}_t\right\} \qquad (*)$$

όπου: $\hat{\xi}_{t+1} = Q\hat{\xi}_t + \varepsilon_{t+1}$.

Θέλουμε να μετατρέψουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων διαφορών 2ου βαθμού σε ένα ισοδύναμο 1ου βαθμού. Προκειμένου να κάνουμε αυτή τη μετατροπή, αυξάνουμε το πλήθος των μεταβλητών κατά μία:

Υποθέτουμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα A_2 υπάρχει και πολλαπλασιάζουμε από αριστερά τη σχέση (*) με τον A_2^{-1}:

$$E\left\{\hat{x}_{t+2} + A_2^{-1}A_1\hat{x}_{t+1} + A_2^{-1}A_0\hat{x}_t = A_2^{-1}\mathrm{B}_1\hat{\xi}_{t+1} + A_2^{-1}\mathrm{B}_0\hat{\xi}_t\right\},$$

η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1} \\ \hat{x}_{t+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\mathrm{I} \\ A_2^{-1}A_0 & A_2^{-1}A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{x}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{O} \\ A_2^{-1}\mathrm{B}_1\hat{\xi}_{t+1} + A_2^{-1}\mathrm{B}_0\hat{\xi}_t \end{bmatrix}.$$

Εναλλακτικά, ορίζουμε $\hat{\psi}_t$ μια νέα state variable, τέτοια ώστε:

$\hat{\psi}_t \equiv \hat{x}_{t+1}$, και κατά συνέπεια: $\hat{\psi}_{t+1} \equiv \hat{x}_{t+2}$.

Επομένως, το state vector γράφεται:

$\begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{\psi}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1} \\ \hat{\psi}_{t+1} \end{bmatrix}$ και επιπλέον: $\hat{\psi}_t = \hat{x}_{t+1}$.

Εξετάζουμε τον πίνακα $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\mathrm{I} \\ A_2^{-1}A_0 & A_2^{-1}A_1 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας H έχει *2n* ιδιοτιμές, από τις οποίες θέλουμε οι *n* να είναι ευσταθείς και οι *n* να είναι ασταθείς, προκειμένου το σύστημα να χαρακτηρίζεται από τη "saddle path" property.

Έστω Θ ο πίνακας διαγωνοποίησης του πίνακα H, τότε:

$\Theta^{-1}\mathrm{H}\Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \Lambda \end{bmatrix}$, όπου K η υπομήτρα με τις ευσταθείς ιδιοτιμές και Λ η υπομήτρα με τις ασταθείς.

$$\Theta^{-1}\mathrm{H}\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11}^* & \theta_{12}^* \\ \theta_{21}^* & \theta_{22}^* \end{bmatrix}^{-1} \mathrm{H} \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \Lambda \end{bmatrix}.$$

Στόχος είναι να βρούμε μια σχέση της μορφής : $\hat{x}_{t+1} = x(\hat{x}_t, \hat{\xi}_t)$.

Θα καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής :

$$E\left\{x_{t+1} = Tx_t + (\mathrm{I} - VF)^{-1} VA_2^{-1}[\mathrm{B}_1 \hat{\xi}_{t+1} + \mathrm{B}_0 \hat{\xi}_t]\right\},$$

όπου: F είναι ο “forward operator” και $F^{\lambda} x_t = x_{t+\lambda}$,

T, V είναι υπομήτρες της Θ.

Για να απαλείψουμε τον τελεστή των προσδοκιών (E) εισάγουμε την εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά της στοχαστικής μεταβλητής ξ : $\hat{\xi}_{t+1} = Q\hat{\xi}_t + \varepsilon_{t+1}$.

Έχουμε καταλήξει στην ακόλουθη εξίσωση:

$$E\left\{A_2 \hat{x}_{t+2} + A_1 \hat{x}_{t+1} + A_0 \hat{x}_t = \mathrm{B}_1 \hat{\xi}_{t+1} + \mathrm{B}_0 \hat{\xi}_t\right\}$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A_2 αντιστρέφεται, πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με τον αντίστροφό του την παραπάνω σχέση και λαμβάνουμε:

$$E\left\{\hat{x}_{t+2} + A_2^{-1} A_1 \hat{x}_{t+1} + A_2^{-1} A_0 \hat{x}_t = A_2^{-1} \mathrm{B}_1 \hat{\xi}_{t+1} + A_2^{-1} \mathrm{B}_0 \hat{\xi}_t\right\} \Rightarrow$$
$$E\left\{\hat{x}_{t+2} + \widetilde{\mathrm{A}}_1 \hat{x}_{t+1} + \widetilde{A}_0 \hat{x}_t = \widetilde{\mathrm{B}}_1 \hat{\xi}_{t+1} + \widetilde{\mathrm{B}}_0 \hat{\xi}_t\right\}.$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο στο άρθρο του Κολλίντζα, έχουμε την ακόλουθη γενική λύση:

$$E_t x_{t+1} = TE_t x_t + (\mathrm{I} - VF)^{-1} VA_2^{-1} E_t[B_1 \hat{\xi}_{t+1} + B_0 \hat{\xi}_t],$$

όπου: $T = MKM^{-1}$

$V = (N\Lambda N^{-1} - MKM^{-1}) N\Lambda^{-1} N^{-1} (N\Lambda N^{-1} - MKM^{-1})^{-1}$

K : είναι η μήτρα των ευσταθών ιδιοτιμών

T, V : είναι υπομήτρες της Θ.

M, N : είναι υπομήτρες των μητρών με τα ιδιοδιανύσματα, (βλ.3ο μέρος απόδειξης από το άρθρο).

Στόχος είναι να βρούμε τη λύση για το $\hat{x}_{t+1} = x(\hat{x}_t, \hat{\xi}_t)$:

Εξετάζουμε τον όρο: $(\mathrm{I}-VF)^{-1}VA_2E_t[B_1\hat{\xi}_{t+1}+B_0\hat{\xi}_t] \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}-VF)^{-1}\left\{VA_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+1}+VA_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_t\right\}=\\
&(V^0F^0+V^1F^1+V^2F^2+\ldots)\left\{VA_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+1}+VA_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_t\right\}=\\
&V^0F^0\{\ldots\}+V^1F^1\{\ldots\}+V^2F^2\{\ldots\}+\ldots=\\
&\{\ldots\}+V\left\{VA_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+2}+VA_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_{t+1}\right\}+V^2\left\{VA_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+3}+VA_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_{t+2}\right\}+\ldots=\\
&\sum_{j=0}^{\infty}V^j\left\{VA_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+j+1}+VA_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_{t+j}\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}V^{j+1}\left\{A_2^{-1}B_1E_t\hat{\xi}_{t+j+1}+A_2^{-1}B_0E_t\hat{\xi}_{t+j}\right\}. \qquad \textbf{(*)}
\end{aligned}
$$

• Υποθέτουμε, αρχικά, ότι η ξ είναι προκαθορισμένη (deterministic), και έστω ότι η διαδικασία που ακολουθεί είναι: $\hat{\xi}_s=\bar{\xi}, \forall s.$

Στην περίπτωση αυτή, η σχέση **(*)** γράφεται:

$$\sum_{j=0}^{\infty}V^{j+1}(A_2^{-1}B_1\bar{\xi}+A_2^{-1}B_0\bar{\xi})=\sum_{j=0}^{\infty}V^{j+1}A_2^{-1}(B_1+B_0)\bar{\xi}=\sum_{j=0}^{\infty}V^{j+1}\Pi\bar{\xi}$$

όπου: $\Pi=A_2^{-1}(B_1+B_0)$.

• Υποθέτουμε, τώρα, ότι η ξ ακολουθεί μια αυτοπαλίνδρομη στοχαστική διαδικασία πρώτου βαθμού: $\xi \sim AR(1)$, δηλαδή:

$$\hat{\xi}_{t+1}=Q\hat{\xi}_t+\varepsilon_{t+1}$$

Γράφοντας την τελευταία σχέση μία περίοδο μπροστά:

(Λύνουμε με τη μέθοδο της προς τα εμπρός επαγωγής-forward substitution)

$$\hat{\xi}_{t+2}=Q\hat{\xi}_{t+1}+\varepsilon_{t+2}$$

Ομοίως για την επόμενη περίοδο:

$$\hat{\xi}_{t+3}=Q\hat{\xi}_{t+2}+\varepsilon_{t+3}$$

...

Αντικαθιστώντας διαδοχικά τους όρους:

$$\hat{\xi}_{t+2}=Q^2\hat{\xi}_t+Q\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2}$$

$$\hat{\xi}_{t+3}=Q^3\hat{\xi}_t+Q^2\varepsilon_{t+1}+Q\varepsilon_{t+2}+\varepsilon_{t+3}$$

...

$$\hat{\xi}_{t+\lambda}=Q^{\lambda}\hat{\xi}_t+Q^{\lambda-1}\varepsilon_{t+1}+Q^{\lambda-2}\varepsilon_{t+2}+\ldots+Q\varepsilon_{t+\lambda-1}+\varepsilon_{t+\lambda} \Rightarrow$$

$$\hat{\xi}_{t+\lambda} = Q^{\lambda}\hat{\xi}_t + \sum_{i=0}^{\lambda-1} Q^i \varepsilon_{t+\lambda-i}$$

Παίρνοντας προσδοκίες στην τελευταία σχέση:

$$E_t\hat{\xi}_{t+\lambda} = Q^{\lambda}\hat{\xi}_t + \sum_{i=0}^{\lambda-1} Q^i E_t \varepsilon_{t+\lambda-i} \Rightarrow$$

$E_t\hat{\xi}_{t+\lambda} = Q^{\lambda}\hat{\xi}_t$,   αφού: $E_t \varepsilon_{t+j} = 0, j > 0.$ **(**)**

Αντικαθιστώντας τη σχέση **(**)** στην **(*)**:

$$\sum_{j=0}^{\infty} V^{j+1} A_2^{-1}[B_1 Q^{j+1}\hat{\xi}_t + B_0 Q^j \hat{\xi}_t] = \sum_{j=0}^{\infty} V^{j+1} A_2^{-1}[B_1 + B_0 Q^{-1}] Q^{j+1}\hat{\xi}_t = \sum_{j=0}^{\infty} U \hat{\xi}_t \ ,$$

όπου: $U = V^{j+1} A_2^{-1}[B_1 + B_0 Q^{-1}] Q^{j+1}$

Η μήτρα U έχει διαστάσεις $n \times m$, και η ξ $m \times 1$.

Το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει αν τα στοιχεία των μητρών V και Q είναι κατ’απόλυτη τιμή μικρότερα της μονάδας.

Έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο στοχαστικό σύστημα διαφορών πρώτου βαθμού:

$$\hat{x}_{t+1} = T\hat{x}_t + U\hat{\xi}_t$$

$$\hat{\xi}_{t+1} = Q\hat{\xi}_t + \varepsilon_{t+1}$$

Στόχος μας είναι να πάρουμε τη λύση για το $\hat{x}$:

(Ακολουθούμε τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής-backwards substitution)

$$\hat{x}_{t+1} = T\hat{x}_t + U\hat{\xi}_t$$

$$\hat{x}_t = T\hat{x}_{t-1} + U\hat{\xi}_{t-1}$$

$$\hat{x}_{t-1} = T\hat{x}_{t-2} + U\hat{\xi}_{t-2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\hat{x}_t = T^2\hat{x}_{t-2} + TU\hat{\xi}_{t-2} + U\hat{\xi}_{t-1} \Rightarrow$$

$$\hat{x}_t = T^3\hat{x}_{t-3} + T^2U\hat{\xi}_{t-3} + TU\hat{\xi}_{t-2} + U\hat{\xi}_{t-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\hat{x}_t = T^t\hat{x}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} T^j U\hat{\xi}_{t-j-1} \qquad \textbf{(***)}$$

Simulations

Θέλουμε να βρούμε τη σειρά για το $\hat{x}_t$: χρειαζόμαστε το $\hat{x}_0$ και τις παρελθούσες τιμές για το $\hat{\xi}_{t-j-1}$.

Κατασκευάζουμε τη σειρά για το $\hat{\xi}$:

Από τη σχέση (**) φτιάχνουμε τις ακόλουθες σειρές:

$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \dots \\ \hat{\xi}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \dots \\ \hat{x}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, όπου υποθέτουμε τις αρχικές τιμές $\hat{x}_0$ και $\hat{\xi}_0$.

Από τη στιγμή που βρήκαμε τη σειρά για το $\hat{x}_t$, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη διαδικασία:

$$x \rightarrow HP_{filter} \rightarrow \begin{matrix} \text{Κυκλική} \\ \text{Συνιστώσα} \end{matrix} \rightarrow \text{Αποκλίσεις} \rightarrow \begin{matrix} \text{Σύγκριση} \quad \text{με} \\ \text{δεδομένα} \end{matrix}$$

- Αρκεί μια σειρά τυχαίων αριθμών για τη σειρά $\{\varepsilon_t\}$?

Όχι, γιατί θέλουμε τα $\{x\}$ όσο το δυνατόν πιο ανεξάρτητα από την επιλογή της τυχαίας σειράς $\{\varepsilon_t\}$. Η επιλογή των $\{\varepsilon_t\}$ γίνεται από τη MATLAB (random number generator) από την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση σ_ε. Η τιμή του σ_ε θα επιλεχθεί ώστε το volatility του GDP που παράγει το υπόδειγμα να είναι ίδιο με το volatility του GDP στα data.

Αντίστοιχα δουλεύουμε και για το persistence (ρ).

- Πόσο θα είναι το μέγεθος του χρονικού ορίζοντα Τ ?

Με άλλα λόγια, ποιο το μέγεθος της σειράς για να υπολογίσουμε της ροπές δεύτερης τάξης? (second moment properties).

Αν για παράδειγμα έχουμε δεδομένα για 30 έτη, δεν λαμβάνουμε ως Τ το 30, γιατί στις 30 αυτές παρατηρήσεις έχουμε υποθέσει τις αρχικές τιμές $\hat{x}_0$ και $\hat{\xi}_0$. Επομένως, φτιάχνουμε σειρές με π.χ. 100 παρατηρήσεις, από τις οποίες κρατάμε τις 30 τελευταίες. Για τις παρατηρήσεις αυτές υπολογίζουμε τις ροπές δεύτερης τάξης.

Συνοψίζοντας τη μέχρι εδώ διαδικασία:

• Υπολογίζουμε τις μήτρες Τ και V.
• Από τη σχέση (***) βρίσκουμε το $\hat{x}_t$.
• Δημιουργούμε Ν τυχαίες σειρές για τις $\{\varepsilon, \hat{x}, \hat{\xi}\}$.
• Παίρνουμε ως $\hat{x}$ τον μέσο όρο των σειρών για το x από το προηγούμενο βήμα.
• Επιλέγουμε τις σειρές με τα κατάλληλα σ και ρ.
• Επιλέγουμε τον χρονικό ορίζοντα Τ.
• Υπολογίζουμε τις ροπές δεύτερης τάξης. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις σειρές. Δηλαδή, που υπολογίζουμε τις ροπές δεύτερης τάξης. Οι σειρές πρέπει να έχουν συμβατότητα μεταξύ τους, π.χ. συγκρίνουμε κατά κεφαλή μεγέθη μεταξύ τους ή προσέχουμε στον υπολογισμό της κυκλικής συνιστώσας από ποιες σειρές αφαιρούμε την τάση: σειρά των πραγματικών δεδομένων ή σειρά των τεχνητών δεδομένων.

Second Moment Properties

Εξετάζουμε τις ιδιότητες της ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ των σειρών.

Κυκλική Συνιστώσα: είναι οι αποκλίσεις μιας σειράς από την τάση της.

Συγκρίνω τις στατιστικές ιδιότητες της κυκλικής συνιστώσας στα data (X) με αυτές που προκύπτουν από το υπόδειγμα (X^*).

Data: $X=\{Y, C, I, K, L\}$

Model: $X^*=\{Y^*, C^*, I^*, K^*, L^*\}$

(1) VOLATILITY

Κριτήριο: $\frac{S^X}{S^{GDP}}$

(2) PERSISTENCE

Κριτήριο: "First-Order Serial Correlation" – $\{\rho^X, \rho^{X^*}\}$

(3) COMOVEMENT

Εξετάζει τη συσχέτιση ανάμεσα στις τρέχουσες τιμές της X και στις τιμές της $X_{t\pm\lambda}$.

Συνήθως εξετάζουμε για λ=1.

Πιο συγκεκριμένα:

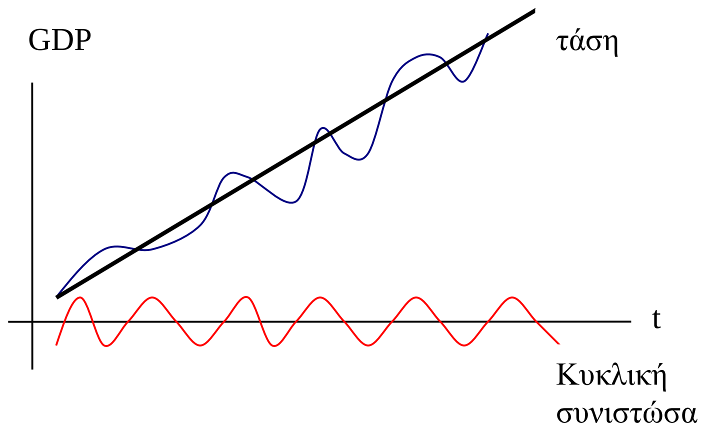
$\{\rho_{Y_t X_{t-1}}, \rho_{Y_t X_t}, \rho_{Y_t X_{t+1}}\}$ και $\{\rho_{Y^*_t X^*_{t-1}}, \rho_{Y^*_t X^*_t}, \rho_{Y^*_t X^*_{t+1}}\}$.

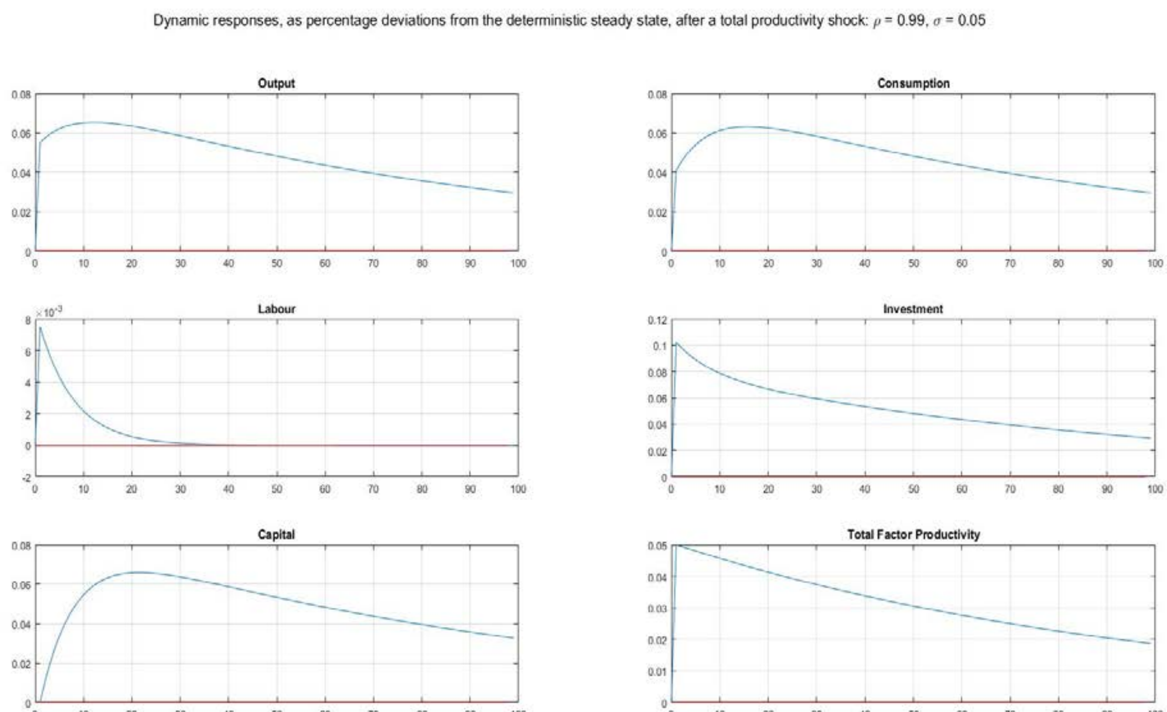
Μας ενδιαφέρει να δούμε ποια τιμή του ρ είναι η μεγαλύτερη.

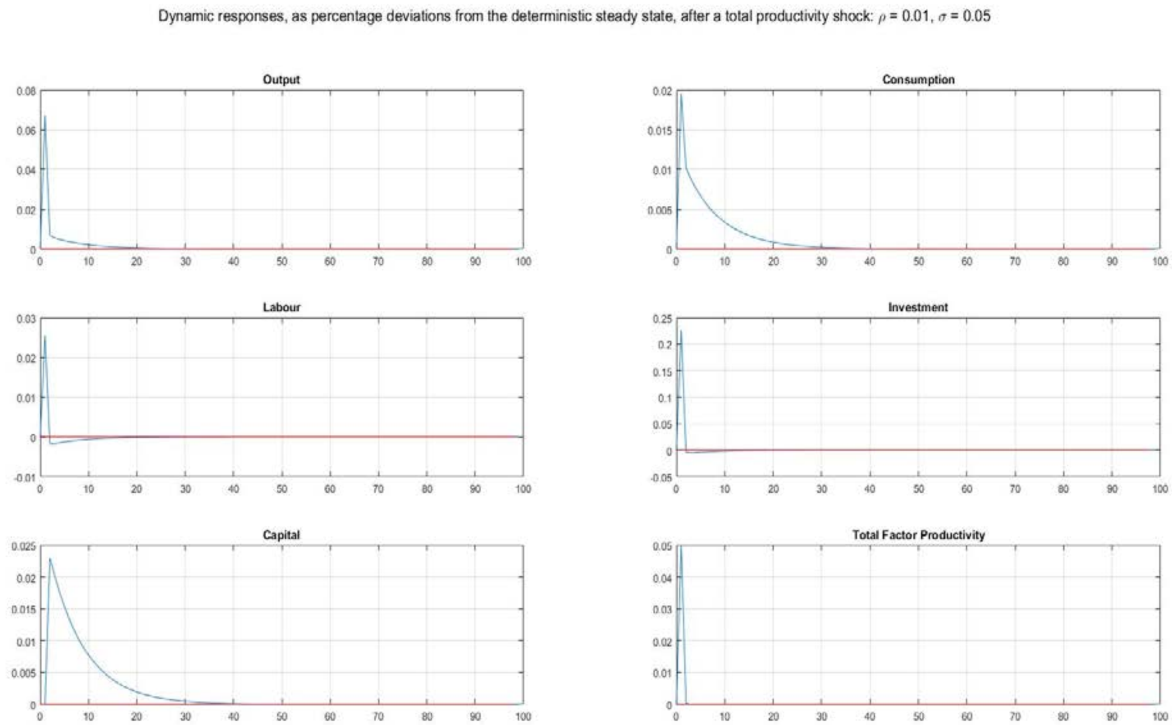
π.χ. εξετάζουμε:
- Y και $X_{t\pm\lambda}$
- Y* και $X^*_{t\pm\lambda}$

[***(4) VAR PROPERTIES***

Εξετάζονται οι συναρτήσεις αιφνίδιας απόκρισης – Impulse Response Functions.**]**


GDP
τάση
t
Κυκλική
συνιστώσα


Dynamic responses, as percentage deviations from the deterministic steady state, after a total productivity shock: ρ = 0.99, σ = 0.05
Output
Consumption
Labour
Investment
Capital
Total Factor Productivity



<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Real Business Cycles (RBC):</u>

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

1. Βρίσκουμε δεδομένα (data) για τις μεταβλητές X και Y.
2. Υπολογίζουμε : lnX και lnY .
3. Βρίσκουμε την τάση: $\ln X^{HP}$ και $\ln Y^{HP}$, όπου HP= φίλτρο Hodrick-Prescott.
4. Βρίσκουμε την κυκλική συνιστώσα: $x = \ln X - \ln X^{HP}$ και $y = \ln Y - \ln Y^{HP}$.
5. Υπολογίζουμε τα second moment properties για τα x και y .
6. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (1)-(5) για το υπόδειγμα, δηλαδή βρίσκουμε:
   - X^* και Y^*
   - $\ln X^*$ και $\ln Y^*$
   - $\ln X_*^{HP}$ και $\ln Y_*^{HP}$
   - $x^* = \ln X^* - \ln X_*^{HP}$ και $y^* = \ln Y^* - \ln Y_*^{HP}$.
7. Συγκρίνουμε τις διαδικασίες για τα πραγματικά δεδομένα και για τα δεδομένα του υποδείγματος.

STYLIZED FACTS: Real Data

- We observe that consumption is significantly “smoother" than output; in contrast investment is more than 2.5 times more volatile than output.
- Hours are about as volatile as output.
- Productivity, the real interest rate, and real wages are significantly smoother than output. TFP is about two-thirds as volatile as output.
- Consumption, investment, hours, and TFP are all strongly correlated with output (and indeed also with each other). Productivity is somewhat more weakly correlated with output; and indeed this correlation masks a large sign shift in the correlations from strongly positive prior to the mid-1980s to weakly negative thereafter.
- Real wages are weakly correlated with GDP; although this probably significantly understates the true cyclicality of wages because of a selection bias.
- The real interest rate is essentially acyclical (that correlation will typically go slightly negative if I use ex-ante expectations of inflation as opposed to ex-post inflation).
- The price level is mildly countercyclical.
- We see that almost all series are strongly persistent in the sense of having a large first order autocorrelation coefficient. The least persistent series is the real interest rate, but this autocorrelation is still 0.42.
- We observe that hours are a lagging indicator in the sense that the correlation with output lagged one year is quite positive. The real interest rate is negatively correlated with output led four quarters.

STYLIZED FACTS: Simulated Data

- The model does a pretty good job at matching the volatilities of output, consumption, and investment { in particular, consumption is significantly smoother than output, and investment is significantly more volatile than output.
- The model does a good job of matching the volatilities of labor productivity and TFP.

- The model also does a good job at matching the own autocorrelations { the series are all persistent with first order autocorrelation coefficients typically in the neighborhood of 0.75.
- Lastly, the model captures the fact that most quantity series (consumption, investment, hours, productivity, and TFP) are quite procyclical (high contemporaneous correlations with output), though these correlations are too high in the model relative to the data.
- The model does not generate enough volatility of interest rates (relative standard deviation of 0.03 in model vs. 0.24 in the data).
- Further, it generates wages and real interest rates that are far too procyclical relative tothe data. In the data, wages are very modestly procyclical and real interest rates are acyclical or coutnercyclical, depending on how you measure them.
- There is some evidence that aggregate wage date understates the procyclicality of wages due to a composition bias (Solon, Barsky, and Parker, 1994), so the wage cyclicality can potentially be reconciled.
- It's much harder to deal with the interest rate cyclicality.
- The model does not do great at the dynamic correlations. One particular area of failure is the fact that real interest rates positively lead output in the model, whereas they negatively lead output in the data (King and Watson, 1988).
- Finally, another failure of the model is that it does not generate sufficient volatility of hours { in the data, hours are actually slightly more volatile than output (this relative volatility has risen over time), but in the model hours are about half as volatile as output.

EXTENSIONS

Some of these defficiencies are easier to deal with than others. For example, we can employ a version of Hansen (1985) and Rogerson (1988) indivisible labor model" to get what essentially amounts to infinitely elastic labor supply. This will work to raise the volatility of hours and lower the cyclicality of wages.

We could also add money to the model in a way that doesn't change any of the above results, but which makes the model capable of matching the countercylicality of the price level.

In addition, we can add shocks to things other than technology { things like government spending shocks or distortionary tax shocks (McGrattan, 1994)}.

These can work to lower the contemporaneous correlations with output, which are too high in the data.

CRITISISM

Critics of the real business cycle model are uncomfortable with the facts that:

(a) It is driven by technology \shocks" and

(b) These shocks must be large and sometimes negative.

Hence, much of business cycle research since the 1980s has been involved in modifying the basic model to (a) allow other shocks to “matter" in a way that they can't in the basic model (e.g. monetary policy) and (b) generating better and more realistic mechanisms for the model to take “small" shocks (as opposed to large) and produce relatively large business cycles.