Φροντιστήριο 10

Κατανομές πιθανότητας ως διαδικασίες ολοκλήρωσης

Όπως αναφέρθηκε στις διαλέξεις, αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} g \, d\mathbb{P}$ μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ εφόσον η g έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Όποια συνάρτηση g συναντήσουμε θα έχει επιλεγεί ώστε να είναι τυχαία μεταβλητή (επομένως, δεν μας ενδιαφέρει στο πλαίσιο του μαθήματος να δούμε αυστηρά ποιες συναρτήσεις είναι τυχαίες μεταβλητές και δεν θα ασχοληθούμε με το να το επιβεβαιώνουμε).

- **Ορισμός:** Αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{P}_X$ (δηλαδή $X \sim \mathbb{P}$) και η μετρήσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η $g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή ως προς τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$.

- Στην περίπτωση που η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με δυνατές τιμές x_i και συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας $\mathbb{P}(\{x_i\})$, η αναμενόμενη (ή μέση) τιμή της $g(X)$, δεδομένου ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$, δίνεται από:

$$E(g(X)) = \sum_{i \in supp} g(x_i) \cdot \mathbb{P}_X(\{x_i\}) \quad , \text{όπου } \mathbb{P}_X \text{: διακριτή κατανομή}$$

- Στην περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$, δεδομένου ότι υπάρχει, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) f_X δίνεται από:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \, dx \quad , \text{όπου: } f_X \text{: συνάρτηση πυκνότητας της } \mathbb{P}_X$$

· Συνοπτικά, ο ορισμός της αναμενόμενης τιμής, όπως δίνεται στις διαλέξεις (με απλουστευμένο συμβολισμό) είναι ο ακόλουθος:
- Αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και η $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, τότε η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την $\mathbb{P}$ δίνεται από:

$$E(g) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} g(i)\, \mathbb{P}(\{i\}) & \text{, όπου } \mathbb{P}\text{: διακριτή κατανομή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz & \text{, όπου η } f(z) \text{ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της } \mathbb{P} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

i) Είναι δυνατόν η $E(g)$ να μην υπάρχει για κάποιες g και $\mathbb{P}$ εξαιτίας απειρισμών, απροσδιοριστιών κ.ο.κ. Θα λέμε ότι η $E(g)$ υπάρχει αν και μόνο αν $E(g) \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση όπου η $E(g)$ υπάρχει, η g ονομάζεται ολοκληρώσιμη (integrable) ως προς την $\mathbb{P}$.

ii) Η $E(g)$ εξαρτάται τόσο από την $g(X)$ όσο και απ' την $\mathbb{P}$.

iii) Όταν η $\mathbb{P}$ είναι διακριτή με πεπερασμένο supp, τότε η $E(g)$ υπάρχει για κάθε g τυχαία μεταβλητή.

· Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το να γνωρίζουμε την $E(g)$ για δεδομένη $\mathbb{P}$ και κάθε δυνατή g, ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ και συνεπώς, η $\mathbb{P}$ μπορεί να νοηθεί ως διαδικασία ολοκλήρωσης συναρτήσεων και μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτά τα ολοκληρώματα προκειμένου να υπολογίσουμε εις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

Ουσιαστικά, η $E(g)$ κάθε σχετικής συνάρτησης g μας δίνει "πληροφορία" για ιδιότητες της κατανομής $\mathbb{P}$.

Συνεπώς, το να αντιλαμβανόμαστε την $\mathbb{P}$ ως διαδικασία ολοκλήρωσης κατάλληλων συναρτήσεων ισοδυναμεί με μία ακόμα αναπαράσταση της $\mathbb{P}$.

Παραδείγματα

1. Κατανομή Bernoulli: με παράμετρο q

Έστω ότι $q \in (0,1)$, $\mathbb{P} = Ber(q)$ και g μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση.

$supp = \{0,1\}$ · Επειδή το supp είναι πεπερασμένο,
$\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$ η $\mathbb{E}(g) \in \mathbb{R}$ για κάθε δυνατή μετρήσιμη
$\mathbb{P}(\{1\}) = q$ συνάρτηση g

Η αναμενόμενη τιμή της g ως προς $Ber(q)$ δίνεται από:

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i\in\{0,1\}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) = g(0)\cdot\mathbb{P}(\{0\}) + g(1)\cdot\mathbb{P}(\{1\}) = g(0)\cdot(1-q) + g(1)\cdot q$$

Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Ber(q)$.
Υπολογίζουμε την $\mathbb{E}(g)$ για την συνάρτηση $g(z) = e^{tz}$, όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$. Τότε, η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(g)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}(g) = g(0)\cdot(1-q) + g(1)\cdot q = e^{t\cdot 0}(1-q) + e^{t\cdot 1} q = e^{0}(1-q) + e^{t} q =$$
$$= 1-q + q\cdot e^{t} = 1 + q(e^{t}-1)$$

2. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$ και $q \in (0,1)$

Έστω $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P} = Bin(n,q)$

$supp = \{0,1,2,\dots,n\}$ · Επειδή το supp είναι πεπερασμένο,
$\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{n}{i} q^{i}(1-q)^{n-i}$, $i \in supp$ η $\mathbb{E}(g) \in \mathbb{R}$, για κάθε δυνατή g

Ας υπολογίσουμε την $\mathbb{E}(g)$ για την συνάρτηση $g(z) = e^{tz}$.

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i\in\{0,1,2,\dots,n\}} g(i)\cdot\mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} e^{ti}\cdot\binom{n}{i} q^{i}(1-q)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} e^{ti}\cdot q^{i}(1-q)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(e^{t}\cdot q)^{i}(1-q)^{n-i} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{*}{=}\left(e^{t}\cdot q+1-q\right)^{n}=\left(1+q\left(e^{t}-1\right)\right)^{n}$$

(*) Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$(\alpha+\beta)^{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}\beta^{n-i}$$, όπου στην περίπτωσή

μας $\alpha=e^{t}\cdot q$

$\beta=1-q$

άρα $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(e^{t}\cdot q\right)^{i}(1-q)^{n-i}=\left(e^{t}\cdot q+1-q\right)^{n}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $n=1$, η $E(g)$ για την συνάρτηση $g(z)=e^{tz}$ ως προς την $Bin(1,q)$ είναι:

$$E(g)=1+q\left(e^{t}-1\right)$$

που είναι ίδια με την αναφερόμενη τιμή $E(g)$ που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για την κατανομή Bernoulli(q) για την $g(z)=e^{tz}$, όπως άλλωστε αναμενόταν αφού γνωρίζουμε ότι η κατανομή Bernoulli με παράμετρο q είναι ειδική περίπτωση της Διωνυμικής κατανομής για $n=1$, δηλαδή $Bin(1,q)=Ber(q)$.

3. Ομοιόμορφη κατανομή

Έστω ότι $\alpha<b$, $n\in\mathbb{N}^{*}$, $\mathbb{P}=Unif_{[\alpha,b]}$ και $g(z)=e^{tz}$ μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση.

Για την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε ότι:

- $supp=[\alpha,b]$
- συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(z)=\begin{cases}0 & , z<a\\ \dfrac{1}{b-a} & , \alpha\le z\le b\\ 0 & , b<z\end{cases}$$

Υπολογίζουμε την $E(g)$ για $g(z)=e^{tz}$. Επομένως,

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\alpha} g(z) f(z) dz + \int_{\alpha}^{b} g(z) f(z) dz + \int_{b}^{+\infty} g(z) f(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} e^{tz} \cdot 0\, dz + \int_{\alpha}^{b} e^{tz} \left(\frac{1}{b-a}\right) dz + \int_{b}^{+\infty} e^{tz} \cdot 0\, dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{b} e^{tz} \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) dz = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{b} e^{tz} dz = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{tz}}{t}\right]_{\alpha}^{b} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{t \cdot b}}{t} - \frac{e^{t \cdot a}}{t}\right) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t}\right) = \frac{e^{tb} - e^{t\alpha}}{t(b-a)}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξαγωγή είναι έγκυρη ακόμη και στην περίπτωση όπου $t=0$, μέσω του κανόνα L'Hopital.
Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε:

$$E(g) = \frac{e^{tb} - e^{t\alpha}}{t(b-a)} \overset{\text{L'Hopital}}{=\!=} \lim_{t \to 0} \left(\frac{b e^{tb} - \alpha e^{t\alpha}}{b-a}\right) = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

4. Τυπική Ομοιόμορφη κατανομή

Μελετάμε μία ειδική περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής, την τυπική ομοιόμορφη κατανομή όπου: $supp = [0,1]$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ 1 & , 0 \le z \le 1 \\ 0 & , 1<z \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την $E(g)$ για $g(z)=e^{tz}$. Έχουμε ότι:

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{0} g(z) f(z) dz + \int_{0}^{1} g(z) f(z) dz + \int_{1}^{+\infty} g(z) f(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tz} \cdot 0\, dz + \int_{0}^{1} e^{tz} \cdot 1\, dz + \int_{1}^{+\infty} e^{tz} \cdot 0\, dz = \int_{0}^{1} e^{tz} dz = \left[\frac{e^{tz}}{t}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left(\frac{e^{t \cdot 1}}{t} - \frac{e^{t \cdot 0}}{t}\right) = \frac{e^{t} - e^{0}}{t} = \frac{e^{t} - 1}{t}$$

Παρατηρούμε ότι η $E(g)$ για $g(z)=e^{tz}$ στην τυπική ομοιόμορφη κατανομή είναι ίδια με την $E(g)$ της ομοιόμορφης κατανομής ($Unif_{[\alpha,b]}$) για $\alpha=0$ και $b=1$.

5. Εκθετική Κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$

Έστω τυχαία μεταβλητή $Z \sim exp(\lambda)$ με $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση, όπου $g(z)=a^z$, όπου $0<\alpha<e$ ($e \simeq 2.71828$). Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της Z. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της εκθετικής κατανομής.

Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι $\lambda=1$. Άρα, η εκθετική κατανομή περιγράφεται από: - $supp = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$

$$- f(z;\lambda) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ \lambda e^{-\lambda z} & , z\geq 0 \end{cases} \overset{\lambda=1}{=\!=} \begin{cases} 0 & , z<0 \\ e^{-z} & , z\geq 0 \end{cases}$$

Επομένως, στην συγκεκριμένη περίπτωση, θα υπολογίσουμε την $E(g)$ για την συνάρτηση $g(z)=a^z$ ως προς την εκθετική κατανομή με $\lambda=1$, $(exp(1))$.

$$E(g) = E(\alpha^z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} g(z) f(z) dz + \int_{0}^{+\infty} g(z) f(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \alpha^z \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} \alpha^z \cdot e^{-z} dz = \int_0^{+\infty} \alpha^z e^{-z} dz = -\int_0^{+\infty} a^z(-e^{-z})\, dz =$$

$$= -\int_0^{+\infty} \alpha^z (e^{-z})' dz \overset{(*)}{=}$$

$$= -\left\{ \left[\alpha^z e^{-z}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-z}\cdot (a^z)' dz \right\} \overset{(**)}{=}$$

$$= -\left[\alpha^z e^{-z}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-z}\cdot a^z \ln a\, dz =$$

$$= -\left[\left(\frac{\alpha}{e}\right)^z\right]_0^{+\infty} + \ln a \int_0^{+\infty} e^{-z} a^z dz =$$

$$= -\left\{ \lim_{z\to+\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^z - a^0 e^0 \right\} + \ln a \int_0^{+\infty} e^{-z} a^z dz =$$

$$\overset{(***)}{=} -\{0-1\} + \ln a\, E(a^z) \Rightarrow E(a^z) = 1 + \ln a \cdot E(a^z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E(a^z) = \frac{1}{1-\ln a}}$$

η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την εκθετική κατανομή με $\lambda=1$ της τυχαίας μεταβλητής Z.

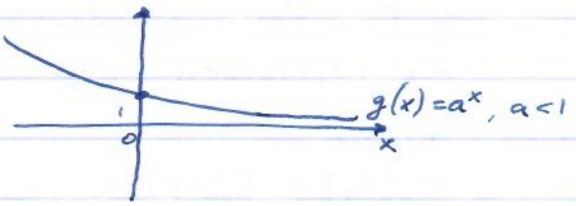
(*) Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση:
Γενικά, $\int_\alpha^\beta g h' = hg\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h\cdot g'$
Στην συγκεκριμένη άσκηση έχουμε:
$h(z) = e^{-z}$
$g(z) = a^z$

(**) Υπενθύμιση: $(a^z)' = \frac{d}{dz}(a^z) = \alpha^z \ln a$

(***) όπου $\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{a}{e}\right)^{z}=0$, γιατί από την εκφώνηση έχουμε ότι

$0<\alpha<e \Rightarrow 0<\frac{\alpha}{e}<1$ και γενικά, ισχύει ότι σε συναρτήσεις της μορφής $g(x)=\alpha^{x}$ με $\alpha<1$, έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} a^{x}=0$

Αυτό φαίνεται και από το σχήμα της $g(x)=a^{x}$ με $0<\alpha<1$.



Επομένως, για $x=z$ και $\alpha=\frac{\alpha}{e}$, παίρνουμε ότι $\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{a}{e}\right)^{z}=0$, αφού $\frac{\alpha}{e}<$

Επιπλέον, έχουμε ότι $\int_{0}^{+\infty} a^{z}e^{-z}dz = E(a^{z})$ από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής $E(g)$, δεδομένου ότι $g(z)=a^{z}$ και η συνάρτηση πυκνότητας $f(z)=e^{-z}$, $z\geq 0$ (έχοντας υποθέσει $\lambda=1$).

• Στο παραπάνω παράδειγμα υπολογίσαμε την αναμενόμενη τιμή $E(g)$ ολοκληρώνοντας την συνάρτηση $g(z)=a^{z}$ ως προς την εκθετική κατανομή $exp(\lambda)$ με $\lambda=1$.
Αυτή η περίπτωση είναι μια γενική περίπτωση του παραδείγματος της εκθετικής κατανομής που συναντήσατε στις διαλέξεις, αν υποθέσουμε ότι η παράμετρος $\lambda=1$. Στις διαλέξεις χρησιμοποιήσατε την συνάρτηση $g(z)=e^{tz}$ και υπολογίσατε την $E(g)$, όταν υπάρχει, δηλαδή στην περίπτωση $t<\lambda$. Επομένως, δείξατε ότι η συνάρτηση $g(z)=e^{tz}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς οποιαδήποτε εκθετική κατανομή που αντιστοιχεί σε $\lambda>t$ και η αναμενόμενη τιμή της είναι

$$E(g)=\frac{\lambda}{\lambda-t}, \quad \text{αν } t<\lambda.$$

Συνεπώς, η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης $g(z)=e^{tz}$ ως προς την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda=1$, όταν $t<\lambda$ δίνεται από:

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^{tz} \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} e^{tz} \cdot e^{-z}\, dz =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(t-1)z}\, dz \overset{t<1}{=} \frac{1}{1-t}, \quad t<1$$

Επομένως, η συνάρτηση $g(z) = e^{tz}$ είναι μία ειδική περίπτωση της συνάρτησης που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμά μας, της $g(z) = a^z$, για $\alpha = e^t$. Όπως είδαμε στο παράδειγμά μας, η αναμενόμενη τιμή $E(g)$ της συνάρτησης $g(z) = \alpha^z$ ως προς την εκθετική κατανομή με $\lambda = 1$, δίνεται από:

$$E(g) = E(\alpha^z) = \frac{1}{1 - \ln a}$$

Συνεπώς, για $\alpha = e^t$, η αναμενόμενη τιμή $E(g)$ της $g(z) = e^{tz}$ είναι:

$$E(g) = E(e^{tz}) = \frac{1}{1 - \ln e^t} = \frac{1}{1-t}, \quad \text{για } t<1$$