Φροντιστήριο 7

Συνάρτηση πυκνότητας (pdf)

Ορισμός: Έστω κατανομή $\mathbb{P}$ και F η αθροιστική της συνάρτηση. Αν υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \quad , \forall x\in\mathbb{R}$$

τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής (probability density function - pdf).

QS: Πότε υπάρχει μία συνάρτηση πυκνότητας?

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει η συν. πυκνότητας f είναι η αθροιστική συνάρτηση F να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα συνέχειας που είναι ισχυρότερη της συνηθισμένης (ονομάζεται απόλυτη συνέχεια - εκτός του εύρους του μαθήματος).

Θεώρημα Ύπαρξης

Προκειμένου να υπάρχει η συν. πυκνότητας f είναι απαραίτητο:

α. η αθροιστική συνάρτηση F να είναι παντού συνεχής.

β. η F να είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη*.

* Η έκφραση σχεδόν παντού παραγωγίσιμη σημαίνει ότι επιτρέπεται να υπάρχουν x στα οποία η F δεν είναι παραγωγίσιμη, αρκεί να είναι απομονωμένα μεταξύ τους δηλαδή να συγκροτούν ένα διακριτό σύνολο.

- Συνεπώς, εφόσον μία κατανομή $\mathbb{P}$ έχει αθροιστική συνάρτηση F που δεν είναι καν συνεχής τότε δεν μπορεί να έχει συνάρτηση πυκνότητας f.
- Επομένως, οι διακριτές κατανομές <u>δεν</u> έχουν συνάρτηση πυκνότητας f αφού σ'αυτές η F είναι ασυνεχής. (<u>π.χ.</u> ευφυλισμένη, Bernoulli, Binomial, Poisson κτλ)

Επίσης, συνεχείς κατανομές $\mathbb{P}$ με ασυνεχείς αθροιστικές συναρτήσεις F δεν έχουν συν. πυκνότητας f.

Πώς εξάγουμε την συν. πυκνότητας f ??

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι όταν υπάρχει η f, η αθροιστική συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός ενδεχομένως από μικρού πλήθους σημεία. Επίσης, στα σημεία που είναι παραγωγίσιμη η F, για να εξάγουμε την συνάρτηση πυκνότητας f, παραγωγίζουμε την F ως προς x. Δηλαδή, στα σημεία παραγωγισιμότητας της F, η f δίνεται από το $f = \frac{dF}{dx}$.

Στα σημεία όπου η F δεν παραγωγίζεται, δίνουμε στην f αυθαίρετες τιμές. Οπότε, είναι δυνατόν η f να μην είναι μοναδική. Συμπερασματικά, αν η αθροιστική συνάρτηση F έχει σημεία μη παραγωγισιμότητας, η f δεν είναι μοναδική.

· Για λόγους συνεννόησης, επιλέγουμε ως αυθαίρετες τιμές της f στα σημεία μη παραγωγισιμότητας της F, τις τιμές εκείνες για τις οποίες η f είναι συνεχής στο στήριγμα.

Παράδειγμα

$unif[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ύπαρξης, προκειμένου να ελέγξουμε αν η συν. πυκνότητας f μπορεί να ορίζεται και στην συνέχεια, εξάγουμε την pdf, αν υπάρχει.

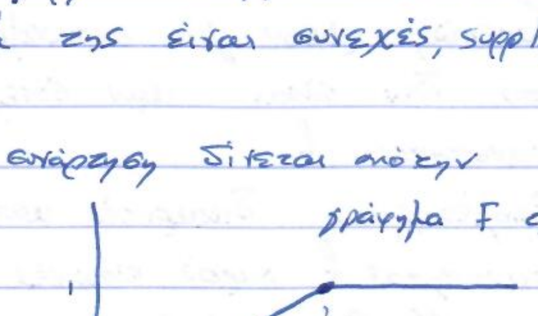
Άρα, στην αρχή εφαρμόζουμε το θεώρημα ύπαρξης:

α) Γνωρίζουμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή $unif[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ είναι συνεχής γιατί το στήριγμά της είναι συνεχές, $supp\, \mathbb{P}_{unif} = [\alpha, \beta]$.

Συνεπώς, η αθροιστική της συνάρτηση δίνεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$$

γράφημα F της $unif[\alpha, \beta]$



· Η F δεν είναι μόνο από δεξιά συνεχής, αλλά είναι παντού συνεχής.

β) Η F είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη εκτός από τα σημεία α, β.
Στα διαστήματα εντός και εκτός supp η F είναι παραγωγίσιμη.
Στα σημεία α και β δεν είναι (δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη με μοναδικό τρόπο). Τα σημεία α και β είναι απομονωμένα μεταξύ τους δηλαδή σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο.
Επομένως, αφού το ~~θ~~ θεώρημα ύπαρξης ικανοποιείται, υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας f. Άρα, αφού υπάρχει η pdf της unif$[\alpha,\beta]$, τώρα πρέπει να την εξάγουμε.

Στα σημεία όπου η F είναι παραγωγίσιμη, η f προκύπτει παραγωγίζοντας την F ως προς x. Άρα,

- $x<\alpha \rightarrow f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{d(0)}{dx} = 0$ σταθερή f

- $\alpha<x<\beta \rightarrow f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) =$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\beta-\alpha}\right) - \underbrace{\cancel{\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)}}_{\to 0} =$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{dx}{dx} = \frac{1}{\beta-\alpha} \quad \text{σταθερή } f$$

- $x>\beta \rightarrow f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{d(1)}{dx} = 0$ σταθερή f

Στα σημεία όπου η F είναι μη παραγωγίσιμη, μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές στην f. Έστω $f(\alpha) = c_1$ και $f(\beta) = c_2$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

άρα

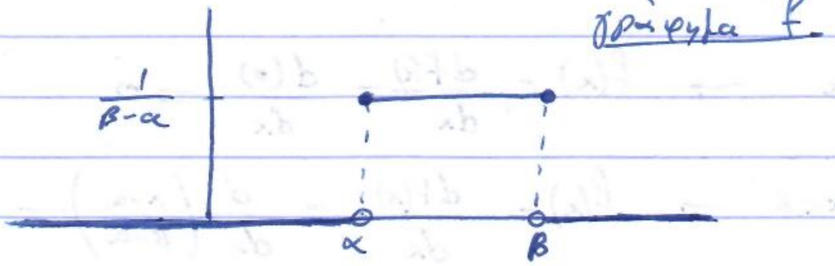
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ c_1, & x=\alpha \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha<x<\beta \\ c_2, & x=\beta \\ 0, & x>\beta \end{cases}$$

Ανάλογα με την επιλογή των c_1, c_2 υπάρχουν άπειρες $f(x)$, δηλαδή συναρτήσεις πυκνότητας. Συνεπώς, η f δεν είναι μοναδική. Αυτό όμως δεν επηρεάζει τις πιθανότητες διότι τα α, β είναι απομονωμένα. Συμβατικά (για λόγους συνεννόησης) διαλέγουμε τιμές τέτοιες ώστε η f να είναι συνεχής στο στήριγμα.
Άρα, εδώ έχουμε $\text{supp}\, P_{un} f = [\alpha, \beta]$. Επομένως, θέτουμε

$$f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Άρα, η συν. πυκνότητας f της $\text{unif}[\alpha, \beta]$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & x > \beta \end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι η συν. πυκνότητας f είναι 0 εκτός του στηρίγματος. Αυτό είναι σύμφωνο με την θεωρία που υποστηρίζει ότι η f θα είναι σταθερή στο 0 εκτός του στηρίγματος.
Αυτό ισχύει διότι, όπως έχουμε δει, μπορεί να αποδειχθεί ότι η αθροιστική συνάρτηση F είναι σταθερή εκτός στηρίγματος.
Αφού η F είναι σταθερή εκτός στηρίγματος κ' άρα παραγωγίσιμη, θα έχουμε ότι η $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad \forall x \notin \text{supp}P$. Δηλαδή, εκτός του supp, η f θα είναι σταθερή στο 0.

Θεώρημα Χαρακτηρισμού της συν. πυκνότητας f

Η συν. πυκνότητας f θα είναι καλώς ορισμένη αν ισχύουν:

α. $f(x) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

β. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, όπου $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ στα σημεία παραγωγισιμότητας της F, ενώ στα σημεία μη παραγωγισιμότητας της F, η f παίρνει αυθαίρετες τιμές.

Συνεπώς, προκειμένου να αποδείξουμε αν οποιαδήποτε συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη pdf, ελέγχουμε την εγκυρότητα των α, β.

Παρατηρήσεις

1. Η pdf δεν ορίζεται για κάθε κατανομή, σε αντίθεση με την cdf που ορίζεται πάντα.
2. Αν η pdf ορίζεται, μπορεί να μην είναι μοναδική. Αυτό συμβαίνει όταν η αθροιστική συνάρτηση F έχει σημεία μη παραγωγισιμότητας. Αντίθετα, η cdf είναι πάντα μοναδική για μια κατανομή $\mathbb{P}$.
3. Βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την f για να υπολογίσουμε πιθανότητες.
4. Για λόγους συνεννόησης, επιλέγουμε την f που είναι συνεχής στο στήριγμα.

Άσκηση 1

1. Να δείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι pdf.
2. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(x \leq 4)$.
3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση F της

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

① Για να δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι καλώς ορισμένη pdf πρέπει να ικανοποιεί το θεώρημα Χαρακτηρισμού. Άρα,

α. $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ που ισχύει διότι για $x<1 \to f(x)=0$ και για $x \geq 1 \to \frac{1}{x^2} \geq 0$ πάντα

β. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$$

άρα ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Άρα, ικανοποιούνται και οι δύο ιδιότητες του θεωρήματος χαρακτηρισμού κι' συνεπώς, η f είναι καλώς ορισμένη συν. πυκνότητας.

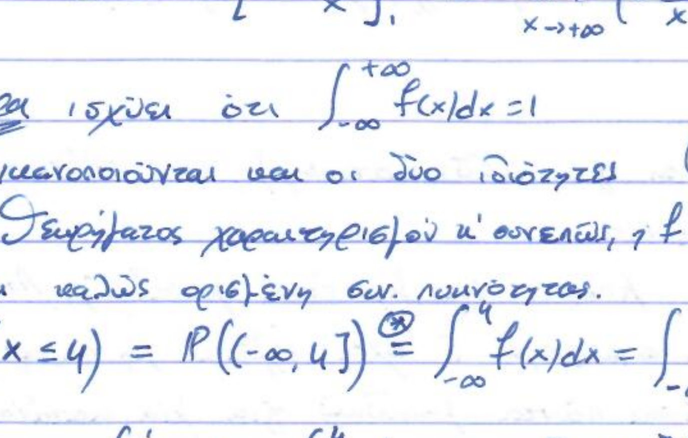
$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\infty} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$

② $$P(X \leq 4) = P((-\infty, 4]) \overset{⊛}{=} \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{4} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Άρα, υπολογίσαμε πιθανότητα χρησιμοποιώντας την συν. πυκνότητας $f(x)$

γράφημα pdf



Βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας f, όπου η f είναι σταθερή στο 0 για $x<1$ και $\frac{1}{x^2}$ για $x \geq 1$.

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα το X να ανήκει σ' ένα διάστημα A, στην προκειμένη περίπτωση το $x \in (-\infty, 4]$, δίνεται από το ολοκλήρωμα της $f(x)$ σ' αυτό το διάστημα. Δηλαδή, $P(x \in (-\infty, 4]) = P((-\infty, 4]) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι το εμβαδόν του σκιαγραφημένου χωρίου στο παραπάνω σχήμα εκφράζει την πιθανότητα το X να πάρει κάποια τιμή μεταξύ του 1 και του 4. Η πιθανότητα το x να πάρει τιμή μικρότερη του 1 είναι μηδενική αφού $f(x)=0, \forall x<1$.

Επομένως, ουσιαστικά για να υπολογίσουμε πιθανότητες χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας (την f), μετράμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ'την καμπύλη της συν. πυκνότητας και τον οριζόντιο άξονα x, για κάθε διάστημα στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το x να ανήκει σ'αυτό το διάστημα.

(*) Υπενθύμιση:

Εξ'ορισμού έχουμε ότι $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Επίσης, εξ'ορισμού γνωρίζουμε ότι: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$.

Άρα, έχουμε ότι $\mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$, όπου f είναι η συν. πυκνότητας.

(3) Εξ'ορισμού γνωρίζουμε ότι $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- $x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} 0\, dz = 0$

- $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{1} 0\, dz + \int_{1}^{x} \frac{1}{z^2} dz = 0 + \left[-\frac{1}{z}\right]_1^x =$

$$= -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}$$

Άρα η cdf της f είναι: $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Άσκηση 2

Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} cx^2 & , 0 < x < 3 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

A. Να βρεθεί το c έτσι ώστε η $f(x)$ να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας (pdf).

B. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση $F(x)$.

Λύση

(A) Για να δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι καλώς ορισμένη pdf πρέπει να ικανοποιεί το Θεώρημα Χαρακτηρισμού. Άρα πρέπει:

α. $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow cx^2 \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$

Άρα, για να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ πρέπει $c \geq 0$.

β. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{3} cx^2dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\int_{0}^{3} x^2dx = 1 \Leftrightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Leftrightarrow c\left(\frac{27}{3} - \frac{0}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{3}c = 1 \Leftrightarrow 9c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{9}.$$

Άρα, για $c = \frac{1}{9} > 0$, η $f(x)$ είναι καλώς ορισμένη pdf.

Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0<x<3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(B) Εξ' ορισμού γνωρίζουμε ότι: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- $x<0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} 0\,dz = 0$

- $0 \leq x < 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{x} f(z)dz =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}z^2dz = \frac{1}{9}\int_{0}^{x} z^2dz = \frac{1}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- $x \geq 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{3} f(z)dz + \int_{3}^{x} f(z)dz =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}z^2dz + \int_{3}^{x} 0\,dz =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{0}^{3} z^2\,dz = \frac{1}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{3} = \frac{27}{27} = 1$$

Συνεπώς, η αθροιστική συνάρτηση $F(x)$ είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Τυχαίες Μεταβλητές

Όπως γνωρίζουμε, τυχαίες μεταβλητές είναι μεταβλητές που η τιμή τους υπόκειται σε διακυμάνσεις λόγω αβεβαιότητας.
Διακρίνουμε τις τυχαίες μεταβλητές ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν και επομένως, τις δυνατές τιμές που μπορούν να πάρουν.

- Μία τυχαία μεταβλητή λέγεται διακριτή τυχαία μεταβλητή όταν το πλήθος δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο και ακολουθεί διακριτή κατανομή.
- Μία τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή όταν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σ'ένα διάστημα αριθμών ή ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μία τυχαία μεταβλητή μπορεί να αντιπροσωπεύουν τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος που το αποτέλεσμά του είναι αβέβαιο (π.χ. ρίψη ζαριού, τ.μ. X: το αποτέλεσμα του ζαριού).

- Επομένως, μία τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει ένα σύνολο δυνατών τιμών, σε κάθε μία απ'τις οποίες αντιστοιχεί μία πιθανότητα (για διακριτές τυχαίες μεταβλητές) ή μία πυκνότητα πιθανότητας (για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές).

- Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, δεν έχει νόημα να μιλάμε για πιθανότητα μιας μεμονωμένης τιμής. Η συνάρτηση πυκνότητας (pdf) ή η αθροιστική συνάρτηση (cdf) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί η πιθανότητα η τιμή να βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

Μία τυχαία μεταβλητή είναι, ουσιαστικά, μία πραγματική συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα δειγματικό χώρο Ω, δηλαδή της μορφής $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ή $X: \Omega \to A$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X είναι μία συνάρτηση $f_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ που ορίζεται ως:

$$f_X(x) = \begin{cases} P_X(\{x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i) & , \text{ αν } x = x_i \in \text{supp} \\ 0 & , \text{ αλλού} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα σύνολο ατόμων, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να εκφράσει την ηλικία του τυχαία επιλεγμένου ατόμου. Σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί μία πιθανότητα $\mathbb{P}(X = x_i)$. Για παράδειγμα $P(X = 27)$ είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει την τιμή 27 δηλαδή εκφράζει την πιθανότητα το τυχαία επιλεγμένο άτομο να είναι 27 χρονών. Η πιθανότητα εξαρτάται από τη διακριτή κατανομή της X.
Η αθροιστική συνάρτηση (cdf) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής είναι: $F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
Η cdf μιας διακριτής τ.μ. δίνει την πιθανότητα η τ.μ. να παίρνει τιμή μικρότερη ή ίση μιας τιμής x.

- Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών (που ακολουθούν συνεχείς κατανομές) όπως αναφέραμε προηγουμένως, δεν έχει νόημα να μιλάμε για πιθανότητα μιας μεμονωμένης τιμής. Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας (pdf) ή αθροιστική συνάρτηση (cdf) χρησιμοποιούνται για να υπολογιστεί η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή σε κάποιο διάστημα.
Η cdf μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\, dz$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων με την συν. πυκνότητας $f(x)$

Αν η $f(x)$ είναι η συν. πυκνότητας (pdf) της τυχαίας μεταβλητής X, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμή σ'ένα διάστημα A, δίνεται από το ολοκλήρωμα της $f(x)$ σ'αυτό το διάστημα: $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx$.

π.χ. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή της οποίας η pdf είναι η $f(x) = 3x^2$, $0<x<1$. Υπολογίζουμε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{1/2}^{1} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{1/2}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ενώ, η πιθανότητα η συνεχής τ.μ. X να παίρνει μεμονωμένη τιμή ίση με $\frac{1}{2}$ είναι: $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1/2} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{1/2}^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$.

- Γενικά, αν η τ.μ. X είναι συνεχής, τότε η πιθανότητα σημείου δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου η X να πάρει τιμή x είναι 0. Δηλαδή, $\mathbb{P}(X = x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{supp} \mathbb{P}_X$. Αυτό σημαίνει ότι τα άκρα του ολοκληρώματος δεν επηρεάζουν τον υπολογισμό πιθανοτήτων συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Επομένως, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η συνεχής τ.μ. X να παίρνει τιμές στο διάστημα $(\alpha, \beta]$. Έχουμε,

$$\mathbb{P}(\alpha < X \leq \beta) = \mathbb{P}_X((\alpha, \beta]) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \int_\alpha^\beta f_X(z)dz$$

Επειδή όμως η πιθανότητα σημείου για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι μηδενική, έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha < X \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leq X < \beta) = \mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f_X(z)dz$$