ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS
ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
SCHOOL OF ECONOMIC SCIENCES
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
DEPARTMENT OF ECONOMICS

Πατησίων 76, 104 34 Αθήνα. Τηλ.: 210 8203437/ Fax: 210 8203301
76, Patision Street, Athens 104 34 Greece. Tel.: (+30) 210 8203437/ Fax: (+30) 210 8203301
Αναπληρωτής Καθηγητής Στυλιανός Αρβανίτης. Associate Professor Stelios Arvanitis. E-mail: stelios@aueb.gr

# Στατιστική ΙΙ-Ακαδημαϊκό Έτος 2021-22

Τα παρακάτω αποτελούν περιληπτική επισκόπηση εννοιών που πραγματευτήκαμε στο μάθημα. Λεπτομέρειες για αυτές τις έννοιες μπορείτε να βρείτε: Α. στο ιστολόγιο του μαθήματος, που περιλαμβάνει περιλήψεις των διαλέξεων, σχετικούς συνδέσμους μέσα σε αυτές τις περιλήψεις, που παραπέμπουν σε σημειώσεις, στους πίνακες των υβριδικών διαλέξεων, σε πίνακες εξ' αποστάσεως διαλέξεων του προηγούμενου Ακ. Έτους, περαιτέρω ασκήσεις, κλπ., Β) στο σχετικό πεδίο εγγράφων του eclass, όπου στον φάκελο του τρέχοντος Ακ. Έτους μπορείτε να βρείτε τις σημειώσεις των φετινών φροντιστηρίων και τις ομάδες ασκήσεων (που προτρέπεστε να τις προσπαθήσετε ανεξάρτητα από το αν θα παραδώσετε λύσεις αυτών καθώς μπορεί να σας βοηθήσουν στην κατανόηση των παρακάτω), ενώ στον φάκελο του περυσινού Ακ. Έτους μπορείτε να βρείτε τις σημειώσεις του διδάσκοντα, σημειώσεις περυσινών φροντιστηρίων, τους πίνακες των περυσινών διαλέξεων, κλπ., Γ. στην ομάδα του μαθήματος στο Microsoft Teams (στην οποία μπορείτε να έχετε πρόσβαση μέσω του ιδρυματικού σας λογαριασμού χρησιμοποιώντας τον κωδικό sjes1wy), και, Δ. προφανώς στις προσωπικές σας σημειώσεις από τις διαλέξεις και τα φροντιστήρια.

(A) Γενική Θεωρία Πιθανοτήτων:

(I) Σύνολα αναφοράς, δυναμοσύνολα αυτών, πράξεις στο δυναμοσύνολο, ένωση, τομή, συμπλήρωμα, διαφορά, πραγματικές συνολο-συναρτήσεις, μονοτονία, προσθετικότητα, συλλογές από μετρήσιμα υποσύνολα αυτών και παραδείγματα, μετρήσιμοι χώροι, κατανομές (μέτρα) πιθανότητας, ορισμός και ιδιότητες-θετικότητα, τυποποίηση, προσθετικότητα ("μικρού πλήθους" ή αριθμήσιμη)-περαιτέρω ιδιότητες όπως η μονοτονία, η μετρησιμότητα, κοκ, η υποπροσθετικότητα ("μικρού πλήθους" ή αριθμήσιμη), αμελητέα και σύνολα πλήρους πιθανότητας, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, η δυσκολία περιγραφής κατανομής πιθανότητας σε περίπλοκα σύνολα αναφοράς όπως το σύνολο των πραγματικών αριθμών, χώροι πιθανότητας, πλήθος κατανομών πιθανότητας που είναι δυνατόν να ορίζονται σε δεδομένο σύνολο αναφοράς και σύνδεση με το στατιστικό πρόβλημα.

(II) Μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις-τυχαίες μεταβλητές, αντίστροφες εικόνες μετρήσιμων υποσυνόλων, ορισμός, παραδείγματα και αντιπαράδειγμα, κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς από μεταφορά μέσω τυχαίων μεταβλητών, παραδείγματα, κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς που περιγράφονται "εύκολα" (Παρατήρηση: οι εν λόγω έννοιες αναπτύχθηκαν στα πλαίσια των φροντιστηρίων του μαθήματος αλλά χρησιμοποιήθηκαν γενικότερα. Πέραν των σχετικών φροντιστηριακών σημειώσεων, ενδεικτικά πρόχειρες σημειώσεις μπορείτε να βρείτε και εδώ,-ενώ δείτε και εδώ για σχετικό πανόραμα).

(B) Κατανομές Πιθανότητας στους Πραγματικούς-Ιδιότητες και Αναπαραστάσεις:

(I) Κλειστά υποσύνολά των πραγματικών, διακριτά-συνεχή-μεικτά υποσύνολα των πραγματικών, η έννοια του στηρίγματος κατανομής στους πραγματικούς, το καλώς ορισμένο και η μοναδικότητα αυτού, έκφραση των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή βάσει του στηρίγματος, ταξινόμηση των κατανομών που μπορούν να οριστούν στους πραγματικούς βάσει ιδιοτήτων των στηριγμάτων τους-διακριτές (το στήριγμα είναι διακριτό), συνεχείς (το στήριγμα έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων), μεικτές (το στήριγμα έχει κλειστό συνεχές και διακριτό μέρος-που είναι ξένα μεταξύ τους), ιδιάζουσες (το στήριγμα δεν έχει καμία από τις παραπάνω μορφές), οι διακριτές κατανομές είναι εύκολα περιγράψιμες αφού η εύρεση των πιθανοτήτων που αποδίδουν ανάγεται στην γνώση της αυστηρά θετικής (γιατί;) πιθανότητας που αποδίδουν σε όποιο στοιχείο του στηρίγματος, παραδείγματα (οικογενειών) διακριτών κατανομών, εκφυλισμένες, Bernoulli, Διωνυμικές, Poisson, πλήθος κατανομών σε κάθε οικογένεια από αυτές, περαιτέρω παραδείγματα διακριτών που κατασκευάζονται από μεταφορά από αυτές μέσω τυχαίων μεταβλητών.

(II) **Αναπαραστάσεις Α**: η έννοια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, ορισμός και καλώς ορισμένο, παραδείγματα-οι αθροιστικές συναρτήσεις των παραπάνω διακριτών κατανομών-θεώρημα χαρακτηρισμού-χαρακτηριστικές ιδιότητες, ασυμπτωτική συμπεριφορά, μονοτονία και από δεξιά συνέχεια -σε κάθε κατανομή αντιστοιχεί μοναδική αθροιστική και σε κάθε συνάρτηση με τις χαρακτηριστικές ιδιότητες αντιστοιχεί μοναδική κατανομή, περαιτέρω ιδιότητες όπως η συμπεριφορά της αθροιστικής εντός και εκτός του στηρίγματος, τι σημαίνει για την κατανομή ότι η αθροιστική της είναι συνεχής ή ασυνεχής σε σημείο και η μορφή των αθροιστικών των διακριτών κατανομών, κ.ο.κ., χρήση της αθροιστικής για την έκφραση και τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή-υπόνοια από αυτό ότι οι κατανομές σχετίζονται με ολοκληρώματα, παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών, παραδείγματα (οικογενειών) κατανομών που τα ορίζουμε μέσω των αθροιστικών τους, ομοιόμορφες, παράδειγμα κατανομής με συνεχές στήριγμα αλλά με ασυνεχή αθροιστική, παράδειγμα μεικτής κατανομής, εκθετικές, κανονικές κατανομές, κατανομές Gamma, κλπ., πλήθη κατανομών στις εν λόγω οικογένειες.

(III) **Αναπαραστάσεις Β**: η έννοια της συνάρτησης πυκνότητας, κίνητρο για την μελέτη της από τον ορισμό των κανονικών κατανομών, ορισμός, ύπαρξη αν και μόνο αν η αθροιστική έχει ως ιδιότητα κάποια ισχυρότερη έννοια συνέχειας της συνηθισμένης (απόλυτη συνέχεια) οπότε υπάρχουν κατανομές (π.χ. οι διακριτές) που δεν έχουν συνάρτηση πυκνότητας, σύνδεση της συνάρτησης πυκνότητας με την σχεδόν παντού παράγωγο της αθροιστικής και δυνατότητα μη μοναδικότητας, περαιτέρω ιδιότητες-ολοκλήρωση της συνάρτησης πυκνότητας σε όλη την πραγματική ευθεία, συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας εκτός του στηρίγματος, δυνατότητα επιλογής της συνάρτησης πυκνότητας ως θετικής συνάρτησης, ικανές ιδιότητες για τον χαρακτηρισμό συνάρτησης ως συνάρτηση πυκνότητας μοναδικής κατανομής, ανάκτηση της αθροιστικής από την συνάρτηση πυκνότητας, έκφραση των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή ως ολοκληρωμάτων ως προς την συνάρτηση πυκνότητας, και αναπαράσταση της κατανομής από την συνάρτηση πυκνότητας (όταν υπάρχει), και παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών. Παραδείγματα ύπαρξης και εύρεσης (της συμβατικής εκδοχής) της συνάρτησης πυκνότητας σε προαναφερθείσες κατανομές όπως οι ομοιόμορφες, οι εκθετικές και οι κανονικές, αναλυτικά χαρακτηριστικά συναρτήσεων πυκνότητας που αντανακλούν ιδιότητες των κατανομών τους-παράδειγμα: η αρτιότητα της συνάρτησης πυκνότητας εκφράζει ιδιότητα συμμετρίας της τυπικής κανονικής κατανομής, παράδειγμα ορισμού κατανομής πιθανότητας μέσω της συνάρτησης πυκνότητας της-τυπική κατανομή Cauchy (η εν λόγω κατανομή εμφανίζεται στην 4η ομάδα ασκήσεων).

(IV) **Αναπαραστάσεις Γ**: Οι κατανομές πιθανότητας ως διαδικασίες (ορισμένης) ολοκλήρωσης κατάλληλων πραγματικών συναρτήσεων (τυχαίων μεταβλητών), περιορισμένος ορισμός του ολοκληρώματος τέτοιας συνάρτησης ως προς κατανομή πιθανότητας στις περιπτώσεις διακριτών κατανομών και κατανομών που έχουν συναρτήσεις πυκνότητας, σχόλια και ιδιότητες, συμβολισμοί, ζητήματα ύπαρξης των ολοκληρωμάτων (ως πραγματικών αριθμών), ολοκλήρωση σταθερών συναρτήσεων, γραμμικότητα, μονοτονία, κ.ο.κ., παραδείγματα υπολογισμών στις προαναφερθείσες κατανομές, αναπαράσταση κατανομής πιθανότητας ως διαδικασίας ολοκλήρωσης-το να γνωρίζουμε το πως ολοκληρώνεται κάθε τέτοια συνάρτηση ως προς κατανομή πιθανότητας ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή αφού μέσω των ολοκληρωμάτων ανακτάται η αθροιστική συνάρτηση. Για την τυπική κατανομή: η ροπή κ-τάξης ανακτάται από την $\left.\frac{d^\kappa \mathbb{E}[exp(tX)]}{dt^\kappa}\right|_{t=0}$, όπου $X \sim N(0,1)$. Τέλος, στο τελευταίο φροντιστήριο του μαθήματος, και δεδομένων των υπολογισμών της τελευταίας διάλεξης, έγινε σύντομη εισαγωγή στην έννοια της ροπογεννήτριας συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, στο πότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση θεωρείται καλώς ορισμένη, και, στην περίπτωση του καλώς ορισμένου, στο πώς υπολογίζονται οι ροπές μια κατανομής με τη χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης (η ροπή κ-τάξης ταυτίζεται με την παράγωγο κ-τάξης υπολογισμένη στο μηδέν της ροπογεννήτριας συνάρτησης).