Φροντιστήριο 10

Όπως είδατε στις διαλέξεις, αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση που έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής, έχει νόημα να οριστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} g \, d\mathbb{P}$.
Αντιλαμβανόμενοι την κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ ως διαδικασία ολοκλήρωσης συναρτήσεων, μας δίνει πληροφορία σχετικά με την $\mathbb{P}$ και ισοδυναμεί με μια ακόμα αναπαράσταση της $\mathbb{P}$.
Στις διαλέξεις ορίσατε τις ροπές κ-τάξης και τις απόλυτες ροπές κ-τάξης, όπου οι ροπές είναι δυνατόν να μας δίνουν πληροφορία για το πώς η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητες και σε κάποιες περιπτώσεις το να γνωρίζουμε τις ροπές ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση (moment generating function)

Η έννοια της ροπογεννήτριας συνάρτησης μας δίνει:

α) την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αναπαράσταση της $\mathbb{P}$ απ' τις ροπές της.

β) τον τρόπο υπολογισμού των ροπών μέσω της απλούστερης διαδικασίας της παραγώγισης.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathbb{P}$, τότε αν $t \in \mathbb{R}$, ως ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(t)$ της $\mathbb{P}$ ορίζεται ως εξής:

$$M(t) := E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} e^{ti} \, \mathbb{P}(\{i\}) , & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f(z) \, dz , & \eta \ f \text{ συνάρτηση πυκνότητας της } \mathbb{P} \end{cases}$$

• Ουσιαστικά, η ροπογεννήτρια συνάρτηση M υπολογισμένη στο $t \in \mathbb{R}$, δίνεται από την ολοκλήρωση της $g_t(x) = \exp(tx)$ ως προς την $\mathbb{P}$. Όταν $t=0$, $g_t(x) = \exp(0) = 1$, $\forall x$ και επομένως, η τιμή της ροπογεννήτριας συνάρτησης (για $t=0$) είναι, $M(0) = 1$, οποια και αν είναι η $\mathbb{P}$.

- Είναι δυνατόν να υπάρχουν $t \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $E(e^{tx})$ να μην υπάρχει. (π.χ. για t όπου $E(e^{tx}) = +\infty$).

Άρα, οδηγούμαστε στο παρακάτω κριτήριο για το πότε η $M(t)$ θεωρείται καλώς ορισμένη.

<u>Κριτήριο</u> : Η M θα θεωρείται καλώς ορισμένη <u>ανν</u> η $E(e^{tx})$ υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός), τουλάχιστον για $\forall t$ σε διάστημα της μορφής $(-t^*, t^*)$ όπου $t^* > 0$, δηλαδή σε διάστημα με κέντρο το 0.

<u>Θεώρημα 1</u> (Αναπαράσταση)
Η $\mathbb{P}$ αναπαρίσταται από την M αν και μόνο αν η M είναι καλώς ορισμένη.

- Επομένως, αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο τότε το να γνωρίζουμε την M ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$.

- Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση M είναι καλώς ορισμένη και $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε συμβολίζουμε με $M^{(\kappa)}$ την παράγωγο κ-τάξης της M, με $M^{(0)} = M$.

<u>Θεώρημα 2</u> (Ροπές & ροπογεννήτρια)
Για την $\mathbb{P}$ υπάρχουν οι ροπές κάθε τάξης και χαρακτηρίζουν την $\mathbb{P}$ αν και μόνο αν η M είναι καλώς ορισμένη.
Σε αυτή και μόνο την περίπτωση έχουμε:

$$E(X^\kappa) = M^{(\kappa)}(0) \quad , \forall \kappa \in \mathbb{N}$$

- Αν και μόνο αν η M είναι καλώς ορισμένη, τότε η ροπή κ-τάξης της $\mathbb{P}$ ταυτίζεται με την παράγωγο κ-τάξης της M για $t=0$.
- Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $M^{(0)}(0) = M(0) = 1 = E(X^0)$

Παραδείγματα

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0

Έχουμε ότι: $- \operatorname{supp} = \{0\}$

$- \mathbb{P}(\{0\}) = 1$

και αν $t \in \mathbb{R}$, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκφυλισμένης κατανομής στο 0 είναι:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i \in \operatorname{supp}} \exp(t \cdot i) \cdot \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i \in \{0\}} \exp(t \cdot i) \cdot \mathbb{P}(\{i\}) =$$

$$= \exp(t \cdot 0) \cdot \mathbb{P}(\{0\}) = \exp(0) \cdot 1 = 1$$

Άρα, αφού $E(e^{tX}) \in \mathbb{R}$, η M είναι καλώς ορισμένη και άρα, ισχύουν τα Θεωρήματα 1-2. Συνεπώς,

$$E(X^k) = M^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k M}{dt^k}\right|_{t=0} = \begin{cases} 1 & , k=0 \\ 0 & , k>0 \end{cases}$$

$E(X^0) = 1$ γιατί, όπως ξέραμε, ισχύει $M^{(0)}(0) = M(0) = E(e^{0X}) = E(e^0) = 1$

2. Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$

Έχουμε ότι: $- \operatorname{supp} = \{0,1\}$

$\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$

$\mathbb{P}(\{1\}) = q$ και αν $t \in \mathbb{R}$.

$$M(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{i \in \{0,1\}} \exp(t \cdot i) \cdot \mathbb{P}(\{i\}) = \exp(t \cdot 0) \cdot \mathbb{P}(\{0\}) + \exp(t \cdot 1) \cdot \mathbb{P}(\{1\})$$

$$= e^0 \cdot (1-q) + e^t \cdot q = 1 - q + \exp(t) \cdot q = 1 + q(e^t - 1)$$

άρα η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$ είναι: $M(t) = 1 + q(e^t - 1)$

Επομένως, η M είναι καλώς ορισμένη και ισχύουν τα θεωρήματα 1-2.
Συνεπώς, αφού η M είναι καλώς ορισμένη, εφαρμόζοντας το θεώρημα 2, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές κάθε τάξης που χαρακτηρίζουν την M. Συνεπώς,

$$E(X^k) = M^{(k)}(0) = \frac{d^k M}{dt^k}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 & , k=0 \\ q & , k>0 \end{cases}$$

3. <u>Κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda>0$</u>

Έχουμε ότι: $-\ supp = \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad , \text{για } i\in\mathbb{N} \text{ και αν } t\in\mathbb{R},$$

$$M(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \exp(t\cdot i)\cdot\mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(t\cdot i)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{ti}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^i}{i!} \overset{(*)}{=}$$

(*) ανάπτυγμα McLaurin για $\boxed{x = e^t\lambda}$ άρα από ανάπτυγμα McLaurin έχουμε $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = e^x$

$$\overset{(*)}{=} e^{-\lambda}\cdot\exp(e^t\cdot\lambda) = e^{-\lambda}\cdot e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)} = \exp(\lambda(e^t-1)).$$

άρα η M είναι καλώς ορισμένη και επομένως, ισχύουν τα θεωρήματα 1,2.
Για να υπολογίσουμε ροπές με την χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$k=1,\ E(X) = M^{(1)}(0) = \frac{dM}{dt}\Big|_{t=0} = \exp(\lambda(e^t-1))\cdot\lambda e^t\Big|_{t=0} =$$

$$= M(t)\cdot\lambda e^t\Big|_{t=0} = M(0)\cdot\lambda e^0 = \lambda$$

$$k=2,\ E(X^2) = M^{(2)}(0) = \frac{d^2M}{dt^2}\Big|_{t=0} = M^{(1)}(t)\cdot\lambda e^t\Big|_{t=0} + M(t)\cdot\lambda e^t\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(\exp(\lambda(e^t-1))\right)'\cdot\lambda e^t\Big|_{t=0} + \exp(\lambda(e^t-1))(\lambda e^t)' =$$

$$= \exp(\lambda(e^t-1))\cdot \lambda e^t \cdot \lambda e^t \Big|_{t=0} + \exp(\lambda(e^t-1))\cdot \lambda e^t \Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$$

Παρατηρούμε ότι οι παραγωγίσεις είναι δυνατόν να αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των ροπών που προκύπτουν από τη μορφή της M. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε ότι:

$$E(X^2) = M^{(2)}(0) = \frac{d^2 M}{dt^2}\Big|_{t=0} = M^{(1)}(t)\lambda \cdot e^t\Big|_{t=0} + M(t)\lambda e^t\Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda E(X) + E(X) = (\lambda+1)\cdot\lambda .$$

Επίσης, έχουμε ότι: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (\lambda+1)\cdot\lambda - \lambda^2 = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$

4. <u>Τυπική Κανονική Κατανομή $N(0,1)$</u>

Έχουμε ότι: $-\ supp = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$, οπότε για $t \in \mathbb{R}$,

$$M(t) = E(\exp(t\cdot X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t\cdot z)\cdot f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t\cdot z)\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tz - \frac{1}{2}z^2\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)\right) dz =$$

$$\overset{\pm t^2}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2tz + t^2 - t^2\right)\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz + t^2) + \frac{t^2}{2}\right) dz =$$

$$= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right)} dz$$

η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right)$ είναι

η συνάρτηση πυκνότητας (pdf) της $N(t,1)$ και

επομένως, από θεώρημα χαρακτηριστικού της pdf ξέρουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right) = 1$$ άρα

η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι: $M(t) = \exp(t^2/2)$.
η οποία είναι καλώς ορισμένη και συνεπώς, ισχύουν τα θεωρήματα 1-2.

Για $\kappa=1$, $E(X) = M^{(1)}(0) = t \cdot \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0} = t \cdot M(t)\Big|_{t=0} = 0 \cdot M(0) =$
$= 0 \cdot E(X^0) = 0$

$\kappa=2$, $E(X^2) = M^{(2)}(0) = (t)' \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0} + t \cdot \left(\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)'\Big|_{t=0} =$

$$= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0} + t \cdot M^{(1)}(t)\Big|_{t=0} = M(t)\Big|_{t=0} + t \cdot M^{(1)}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= M(0) + 0 \cdot M^{(1)}(0) = E(X^0) + 0 \cdot E(X) = 1$$

$\kappa=3$,
$$E(X^3) = M^{(3)}(0) = M^{(1)}(t)\Big|_{t=0} + M^{(1)}(t)\Big|_{t=0} + t\, M^{(2)}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= 2M^{(1)}(t)\Big|_{t=0} + t\, M^{(2)}(t)\Big|_{t=0} = 2E(X) + 0\, E(X^2) = 0$$

• Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι σε κάποια παραδείγματα, όπως η τυπική κατανομή Cauchy, η M δεν είναι καλώς ορισμένη και επομένως, δεν ισχύουν τα θεωρήματα 1-2, επειδή δεν υπάρχουν οι ροπές για κάποιες τάξεις.