Φροντιστήρια 7 & 8

• Όπως έχουμε αναφέρει, ανάλογα με τη μορφή που έχει το στήριγμα διακρίνουμε τις κατανομές σε διακριτές και μη διακριτές. Συγκεκριμένα, μία κατανομή ονομάζεται διακριτή όταν έχει διακριτό στήριγμα (π.χ. $\{0,1,2,3,\dots\}$).

Στις μη-διακριτές κατανομές περιλαμβάνονται οι συνεχείς και οι μεικτές κατανομές. Μία κατανομή λέγεται συνεχής όταν το στήριγμά της είναι συνεχές (π.χ. $[0,1]$ ή $[0,1]\cup[2,3]$).

Μία μεικτή κατανομή ονομάζεται μεικτή όταν το στήριγμά της αποτελείται από ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι.

Ωστόσο, αξίζει να σημειώσουμε ότι αν έχουμε μία συνεχή κατανομή $\mathbb{P}$, δεν συνεπάγεται ότι και η αθροιστική της συνάρτηση F θα είναι συνεχής. Είναι δυνατόν να έχουμε συνεχή κατανομή $\mathbb{P}$ και ασυνέχεια στην αθροιστική συνάρτηση F.

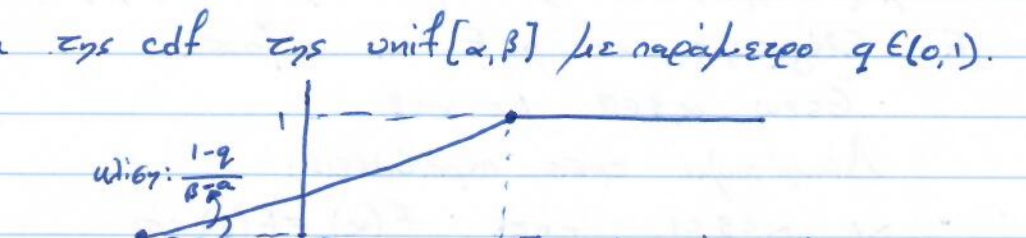
Παραδείγματα

① Ομοιόμορφη κατανομή με παράμετρο q (συνεχής κατανομή)

- $supp = [\alpha,\beta]$, $q \in (0,1)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<\alpha \\ q+(1-q)\dfrac{(x-\alpha)}{\beta-\alpha} & , \alpha \le x < \beta \\ 1 & , x \ge \beta \end{cases}$$

Το γράφημα της cdf της unif$[\alpha,\beta]$ με παράμετρο $q\in(0,1)$.



Παρατηρούμε ότι αν και η $\mathbb{P}$ είναι συνεχής κατανομή αφού το στήριγμά της είναι συνεχές $supp\,\mathbb{P} = [\alpha,\beta]$, η αθροιστική της συνάρτηση F παρουσιάζει ασυνέχεια στο α γιατί

$\lim\limits_{x\to\alpha^-} F(x) = 0$ και $F(\alpha)=q$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^-} F(x) \neq F(\alpha)$

(2) Έστω,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ 1-\frac{1}{x} & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και } supp = [1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{\infty} = 1-0 = 1$$

Παρατηρούμε ότι η F είναι παντού συνεχής, γνησίως αύξουσα εντός του supp και σταθερή εκτός supp.

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ 1-\frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} : m \leq x\} \text{ και } \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

Λύση

Ελέγχουμε αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες του θεωρήματος χαρακτηρισμού της αθροιστικής συνάρτησης F.

(α) Ελέγχουμε αν η F είναι αύξουσα.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- αν $\alpha < \beta < 1$, τότε $F(\alpha) = F(\beta) = 0$
- αν $\alpha < 1$ και $\beta \geq 1$,

  τότε $F(\alpha) = 0$, $F(\beta) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor \beta \rfloor}} > 0$, αφού $\beta \geq 1$

  άρα $F(\alpha) < F(\beta)$

- αν $1 \le \alpha < \beta$, τότε $F(a) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}$

$$F(\beta) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor \beta \rfloor}}$$

άρα πρέπει να δείξουμε ότι αν $1 \le \alpha < \beta$ πρέπει $F(a) \le F(\beta)$
έτσι ώστε η F να είναι αύξουσα.

άρα αφού $\alpha < \beta \Rightarrow 2^{a} < 2^{\beta} \Rightarrow \frac{1}{2^{\alpha}} > \frac{1}{2^{\beta}} \xRightarrow{\times(-1)}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2^{a}} < -\frac{1}{2^{\beta}} \xRightarrow{(+1)} 1 - \frac{1}{2^{a}} < 1 - \frac{1}{2^{\beta}} \Rightarrow F(a) < F(\beta)$$

άρα η F είναι αύξουσα.

(β) Ελέγχουμε αν $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. (ασυμπτωτικές ιδιότητες)

Πράγματι, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x) = 0$ για $\forall x < 1$.

Επίσης, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} \right\} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} =$

$= 1 - \frac{1}{2^{\infty}} = 1 - 0 = 1$ (αφού ξέρουμε ότι $2^{\infty} = \infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$)

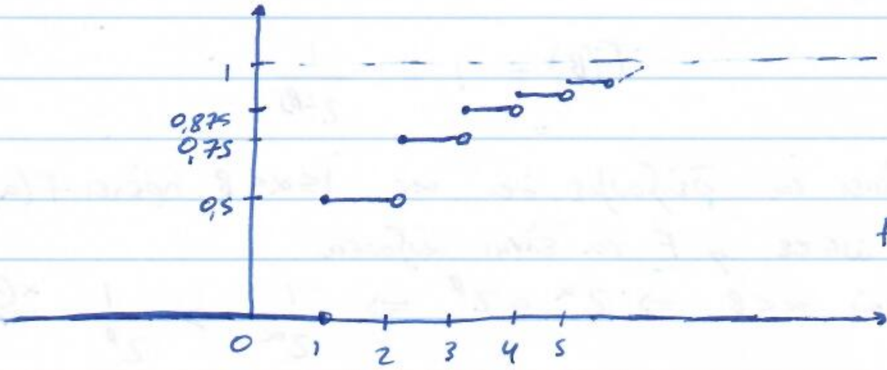
(γ) Ελέγχουμε αν η F είναι από δεξιά συνεχής.
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$

- αν $\alpha < 1$, τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$

- αν $\alpha \ge 1$, τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} \right) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} = F(a)$

Συνεπώς, η F είναι συνεχής από δεξιά.
Εφόσον η F ικανοποιεί τις ιδιότητες α, β και γ του θεωρήματος χαρακτηρισμού, η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση (cdf) μοναδικής κατανομής πιθανότητας P.

Γράφημα cdf



$F(0)=0,\ F(x)=0,\ \forall x<1$

$F(1)=1-\frac{1}{2^1}=0{,}5$

$F(2)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=0{,}75$

$F(3)=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}=0{,}875$

Η F (cdf) έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών (το πλήθος των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$.)

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση (cdf):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1-\frac{1}{2^x}, & x\geq 1\end{cases}\qquad supp\mathbb{P}=[1,+\infty)$$

Λύση

Αφού το $supp\mathbb{P}$ είναι συνεχές σημαίνει ότι η κατανομή $\mathbb{P}$ είναι συνεχής.

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης.

(α) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $\alpha<\beta<1$, τότε $F(\alpha)=F(\beta)=0$

- $\alpha<1$ και $\beta\geq 1$, τότε $F(\alpha)=0$

$$F(\beta)=1-\frac{1}{2^\beta}>0 \text{ γιατί } \beta\geq 1$$

άρα αν $\alpha<1\leq\beta \Rightarrow F(\alpha)<F(\beta)$

- $1 \leq \alpha < \beta$, τότε $F(a) = 1 - \frac{1}{2^a}$ και $F(\beta) = 1 - \frac{1}{2^\beta}$

πρέπει να δείξουμε ότι $F(\beta) - F(a) \geq 0$

$$F(\beta) - F(a) = \left\{1 - \frac{1}{2^\beta}\right\} - \left\{1 - \frac{1}{2^a}\right\} = \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^\beta} > 0$$

ισχύει γιατί $\alpha < \beta \Rightarrow 2^a < 2^\beta \Rightarrow \frac{1}{2^a} > \frac{1}{2^\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^\beta} > 0$$

άρα αν $1 \leq \alpha < \beta \Rightarrow F(a) < F(\beta)$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση για $\alpha < \beta \Rightarrow F(a) \leq F(\beta)$
άρα η F είναι αύξουσα.

(β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x) = 0$, για $\forall x < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left\{1 - \frac{1}{2^x}\right\} = 1 - \frac{1}{2^\infty} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

(γ) Η F είναι από δεξιά συνεχής
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$:

- αν $\alpha < 1$, τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$

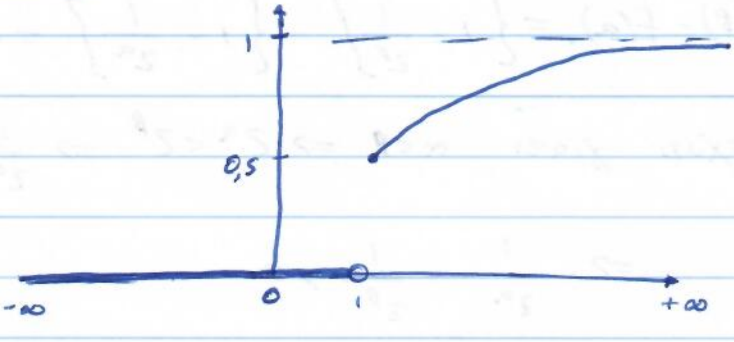
- αν $\alpha \geq 1$, τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 - \frac{1}{2^a} = F(a)$

άρα η $F(x)$ είναι από δεξιά συνεχής.

Άρα, η συνάρτηση που δίνεται ικανοποιεί τις α, β, γ ιδιότητες του Θεωρήματος χαρακτηρισμού της αθροιστικής συνάρτησης (cdf) και επομένως, η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση μοναδικής κατανομής P.

Στην συγκεκριμένη άσκηση, παρατηρούμε ότι ενώ η κατανομή $\mathbb{P}$ είναι συνεχής, η αθροιστική της συνάρτηση F είναι ασυνεχής.

Γράφημα cdf



$F(1) = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Η F είναι ασυνεχής στο $x=1$ γιατί $\lim_{x\to 1^-} F(x) \neq F(1)$,

αφού $\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0$ και $F(1) = 0{,}5$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η F είναι γνησίως αύξουσα εντός στηρίγματος ($\operatorname{supp}\mathbb{P} = [1, +\infty)$) και σταθερή εκτός στηρίγματος.

Εισαγωγή στα Ολοκληρώματα

Η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένη σ' ένα διάστημα, λέμε τις συναρτήσεις που η παράγωγός τους ισούται με $f(x)$. Αν $g(x)$ είναι μια τέτοια συνάρτηση, δηλαδή ισχύει $g'(x) = f(x)$, τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $f(x)$ έχει τη μορφή $g(x) + c$ και συμβολίζεται ως:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + c$$

π.χ. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, όπου $f(x) = x^2$ και ισχύει γιατί

$g(x) = \frac{x^3}{3} + c$ άρα $\frac{d\,g(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$

άρα έχουμε $f(x) = x^2$ και

$g(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$ ν.δ. μια αντιπαράγωγος της f για την οποία ισχύει $g'(x) = f(x)$

$h(x) = \frac{x^3}{3} + c_2$ ν.δ. μια άλλη αντιπαράγωγος της f όπου $h'(x) = f(x)$.

Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $f(x)$ έχει τη μορφή $\frac{x^3}{3} + c$.

Θεώρημα

Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Τότε, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt \, , \quad t \in [\alpha,\beta]$$ είναι παραγωγίσιμη

και η F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Δηλαδή, ισχύει, $F'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \quad \text{για } \forall\, x \in [\alpha,\beta]$$

Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και η $g(x)$ είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ δηλαδή ισχύει $\int f(x)dx = g(x) + c$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = g(\beta) - g(\alpha)$$

Γενικά, ισχύουν τα εξής για τα αόριστα ολοκληρώματα:

1. $\int 0\,dx = c$
2. $\int 1\,dx = x + c$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$
6. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1 \,, x>0 \text{ ή } n \in \mathbb{N}$
7. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
8. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων είναι:

- η μέθοδος της αντικατάστασης
- η κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Έστω $f(x), g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ορισμένες σε κάποιο διάστημα, με συνεχείς παραγώγους. Τότε,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

<u>π.χ.</u> α) $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x \cdot e^x - \int (x)' e^x dx =$

$= x \cdot e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$

όπου $f(x) = x$, $g(x) = e^x$

β) $\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 \cdot e^x - \int (x^2)' e^x dx =$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\left[x \cdot e^x - \int (x)' e^x dx\right] =$

$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2\int (x)' e^x dx =$

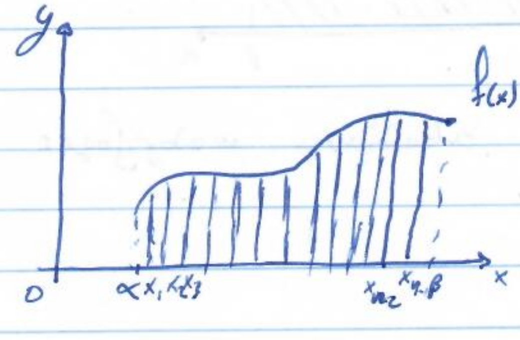
$= x^2 e^x - 2x e^x + 2(e^x + c)$ εφαρμόσαμε 2 φορές κατά παράγοντες ολοκλήρωση

<u>Μέθοδος της αντικατάστασης</u>

Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε. Κάνουμε την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής με σκοπό να απλουστεύσουμε το ολοκλήρωμα και να διευκολύνουμε την επίλυση του. Όταν αλλάζουμε την μεταβλητή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε τροποποιούνται κατάλληλα τα όρια του ολοκληρώματος. <u>Υπενθύμιση</u>! Τα ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής ολοκλήρωσης.

<u>Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος</u>

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$, όπου $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$ (διαμέριση).



Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ για $\forall\, \kappa \in \{1,2,3,\dots,n\}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα:

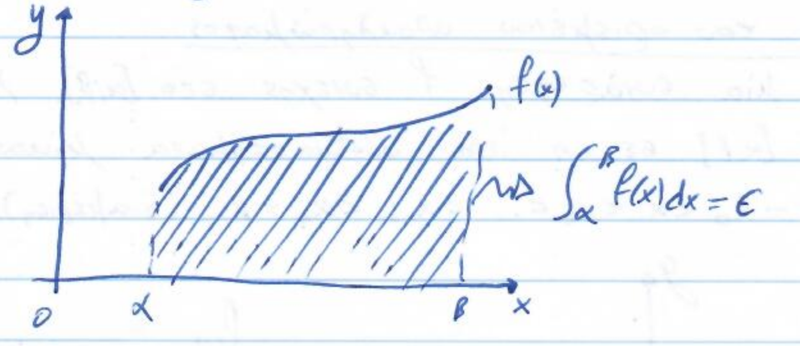
$$\Sigma = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \dots + f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x + \dots + f(\xi_n)\cdot\Delta x =$$
$$= [\,f(\xi_1) + \dots + f(\xi_\kappa) + \dots + f(\xi_n)\,]\cdot\Delta x =$$
$$= \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x \rightarrow \text{άθροισμα Riemann}$$

Αποδεικνύεται ότι: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right).$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ υπολογίζει το εμβαδόν του χώρου που περιορίζεται ανάμεσα στο διάγραμμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τον άξονα των x. Όπως φαίνεται παρακάτω, το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ υπολογίζει το εμβαδόν του διαγραμμισμένου χωρίου.



Γενικά, με την ολοκλήρωση υπολογίζουμε εμβαδόν.

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε:

1. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

2. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (σταθερά)

3. $\int_\alpha^b f(x)\,dx = \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, όπου $\alpha \le c \le b$

4. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$

5. $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$

6. Αν $f(x) \ge 0$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ge 0$

Άσκηση (τυπική κανονική κατανομή, $N(0,1)$)

Να εξετάσετε αν η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz & , x \ge 0 \end{cases}$$

Δίνεται: $\int_0^{+\infty} e^{-k^2}\,dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: ολοκλήρωμα Gauss

Λύση

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης

(α) η F είναι αύξουσα (πρέπει να αποδειχτεί)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- αν $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$
- αν $x_1 < 0$ και $x_2 \ge 0$, τότε $F(x_1) = 0$

$$F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz > 0 \quad \text{γιατί } f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} > 0$$

άρα αν $x_1 < 0 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

- αν $0 \le x_1 < x_2$ ⟹ $F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$$F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

πρέπει να δείξουμε ότι $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ ώστε η F να είναι αύξουσα και για αυτήν την περίπτωση.

άρα έχουμε:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (*)$$

(*) Note!! Από ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann γνωρίζουμε ότι, δεδομένου ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, τότε αν $x_1 < x_2$: $\int_{-\infty}^{x_2} f(z) dz = \int_{-\infty}^{x_1} f(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} f(z) dz$

Άρα, εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα έχουμε:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz > 0 \quad \text{γιατί} \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} > 0$$

άρα $F(x_2) - F(x_1) > 0 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

Συνεπώς, η F είναι αύξουσα σε κάθε περίπτωση.

(β) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ αφού $F(x)=0$ για $\forall\ x<0$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια. Δηλαδή, $f(z) = f(-z)$, αφού το z είναι υψωμένο στο τετράγωνο.

- Για να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Gauss θα πρέπει να κάνουμε τους κατάλληλους μετασχηματισμούς στα όρια του ολοκληρώματος. Ο στόχος είναι να μετασχηματίσουμε τα ολοκληρώματα ώστε να έχουν αντίστοιχη μορφή με το ολοκλήρωμα Gauss, ώστε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Αλλάζουμε την μεταβλητή προς ολοκλήρωση μόνο στο πρώτο ολοκλήρωμα.

Θέτω $p = -z \Rightarrow z = -p$

$dp = -dz \Rightarrow dz = -dp$

νέα όρια

αφού $z=-\infty$ τότε $p = -(-\infty) = +\infty$

$z=0$ τότε $p=0$

άρα συνεχίζοντας την (1) έχουμε, μετά την αλλαγή μεταβλητής:

$$(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(-p)^2}{2}}(-dp) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \overset{**}{=}$$

$$\overset{**}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(-p)^2}{2}}(-dp)\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

(**) Ιδιότητα ορισμένων ολοκληρωμάτων: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(-p)^2}{2}}dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \quad (2)$$

Θέτω $\boxed{p=z}$

$dp = dz$

νέα όρια

$p=0 \Rightarrow z=0$

$p=+\infty \Rightarrow z=+\infty$

μόνο για το πρώτο ολοκλήρωμα

άρα συνεχίζοντας την ② έχουμε:

$$② = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dz \quad ③$$

Θέτω $\boxed{\kappa = \frac{z}{\sqrt{2}}}$ $\Rightarrow dk = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = \sqrt{2}\, dk$

$\Rightarrow z = \sqrt{2} k$

νέα όρια

$z=0 \Rightarrow k=0$

$z=+\infty \Rightarrow k=+\infty$

Άρα, αφού έχουμε θέσει $k = \frac{z}{\sqrt{2}}$ συνεχίζουμε την ③

$$③ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-k^2} (\sqrt{2}\, dk) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-k^2} dk} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

Ολοκλήρωμα Gauss

δίνεται: $\int_0^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Επομένως, καταλήξαμε ότι ισχύει

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Άρα, η F ικανοποιεί τις ασυμπτωτικές ιδιότητες.

(δ) Από δεξιά συνεχής η F (πρέπει να αποδειχτεί)

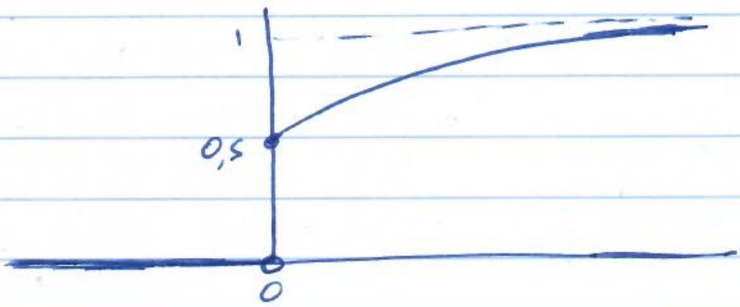
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{x \to \alpha^+} F(x) = F(\alpha) = 0$

- $\alpha \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to \alpha^+} F(x) = \lim_{x \to \alpha^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha^+} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(\alpha)$

Επομένως, αφού ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, η F είναι πράγματι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής ($N(0,1)$).

Γράφημα cdf



$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση:

Θέτουμε $\boxed{k = -\frac{z}{\sqrt{2}}} \Rightarrow z = -\sqrt{2}\cdot k$

$dk = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, dz \Rightarrow dz = -\sqrt{2}\, dk$

νέα όρια

$z = 0 \Rightarrow k = 0$

$z = -\infty \Rightarrow k = +\infty$

άρα $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2}\, dz =$ (μετά την αλλαγή μεταβλητής)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} \left(-\sqrt{2}\, dk\right) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2}\, dk}_{\text{ολοκλήρωμα Gauss } \left(= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$