

Φροντιστήριο Σελ 6

(1)

Άσκηση 1 (Poisson ανά περιόδος)

Είναι η παραπομπή P και $\text{supp } P = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και

$$P(\{x\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \forall x \in \text{supp } P, \lambda > 0$$

Είναι η τυχαία λειτουργία $X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X_1(x) = -x$.

1. Να βρεθεί το σχήμα της P^* ανά περιόδο.

Υπογιαστέας οτι το σχήμα της P^* δεν είναι το εύνοιο $\{-x\}$.

Υποθέτουμε οτι $\text{supp } P^* = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

Υποθέτουμε το εύνοιο $\{-x\}$ δεν σχηματίζεται της P^* , πρέπει τα σειράκια οτι η P^* ανά περιόδος είναι μερικώς οριστήρια διαυριζόμενη παραπομπή και να αποδειχθεί οτι το αντισυμμετρικό εύνοιο $\{-x\}$ είναι ίσως σχηματίζεται της P^* .

Για να είναι η P^* μερικώς οριστήρια διαυριζόμενη παραπομπή πρέπει:

a. Το σχηματίζεται να είναι διαυριζόμενο

b. Για $\forall x \in \text{supp } P^*, P^*(\{x\}) > 0$

c. $P^*(\text{supp } P^*) = 1$

a) Το σχηματίζεται της P^* να έχει μονοτόνη είναι το εύνοιο των αρνητικών αριθμών $\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ το οποίο είναι διαυριζόμενο εύνοιο.

B) Άνοι οριστήριο της παραπομπής ανά περιόδο, γνωρίζουμε οτι:

$$P^*(A) = P(X_1^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{E}$$

Εποκένως, εγντη σημαντικής θεώρης έχουμε:

$$P^*(\{-x\}) = P(X_1^{-1}(\{-x\}))$$

Ανά οριστήριο παραπομπή ανά περιόδο

Εποκένως, εικόνωρα με τον οριστήριο της παραπομπής εμιστάς έχουμε:

$$X_1^{-1}(\{-x\}) = \{x \in \mathbb{R} : X_1(x) = -x\}$$

(2)

Για παραδείγμα, υπολογίσουμε την αντισφρόφη συνέσεως του ευριδού $\{-x\}$ μέσω της ταχείας μεταβλητής X , ως εξής:

$$\begin{array}{lll} X_1(0) = 0 & \Rightarrow X_1^{-1}(0) = 0 & \text{ν. } \underbrace{\text{δηλαδή}}_{\{x \in \mathbb{R}: -x=0\}} \\ X_1(1) = -1 & \Rightarrow X_1^{-1}(-1) = 1 & \text{ν. } \{x \in \mathbb{R}: -x=-1\} \\ X_1(2) = -2 & \Rightarrow X_1^{-1}(-2) = 2 & \text{ν. } \{x \in \mathbb{R}: -x=-2\} \\ X_1(3) = -3 & \Rightarrow X_1^{-1}(-3) = 3 & \text{ν. } \{x \in \mathbb{R}: -x=-3\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ημών } & \{ -x \} & X_1^{-1}(\{-x\}) = \{x\} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι αντισφρόφη συνέσεις του ευριδού $\{-x\}$ είναι το σύνολο $\{x\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Συνεπώς, αν ο αριθμός αντισφρόφη συνέσεων είχετε ότι:

$$IP(X_1^{-1}(\{-x\})) = IP(\{x\})$$

Άριστη,

$$IP^*(\{-x\}) = IP(X_1^{-1}(\{-x\})) = IP(\{x\}) = e^{-x} \cdot \frac{x^x}{x!} > 0$$

αν ο αριθμός μεταβολής
 αν η μεταβολή
 κυριεύεται
 αν ο αριθμός
 κυριεύεται μεταβολής

Ενοχές, δείγματα ότι η IP^* αποδίδει ανεπίσημη δεξιά γενικότητα για τα ιδανικά μεταβολής.

8) Δείχνουμε ότι η μεταβολή κινή μεταβολή IP^* αποδίδει για το ευριδό $\{-x\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ πενταδιαία π.διανομή. Αν ισχει, τότε το ευριδό που έχει μεταβολή ως επηργήσα τη IP^* δεν είναι ίσως το $\text{supp } IP^*$ καθώς η IP^* δεν είναι μεταξύ αριθμητική διακεριτή μεταβολή.

$$\begin{aligned} IP^*(\{-x\}) &= IP^*(\{\dots, -3, -2, -1, 0\}) = IP(X_1^{-1}(\{\dots, -3, -2, -1, 0\})) = IP(\{x\}) = \\ &= IP(\underbrace{\{0, 1, 2, 3, \dots\}}_{\text{supp } IP}) = IP(\text{supp } IP) = 1 \end{aligned}$$

(3)

Ενοτήτως, αφού η μαζανότητα IP^* αποδίδει αυστηρά θερμή
ανθεκτικότητα σε $x \in \{-\dots, -3, -2, -1, 0\}$ και αποδίδει λεπτοσκελή^{λεπτοσκελή}
ανθεκτικότητα στο εύρος αυτό, δεδομένου ότι $IP^*(\{-\dots, -3, -2, -1, 0\}) = 1$, τότε
οι επιρροές της μαζανότητας από λεπτοσκελή IP^* θα είναι:
 $\text{supp } IP^* = \{-\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

2. Να βρεθεί IP^* .

Εφόσον $\text{supp } IP^* = \{-\dots, -3, -2, -1, 0\}$ τότε:

$$IP^*(\{x\}) = e^{-x} \frac{x^{|x|}}{|x|!}, \quad \forall x \in \text{supp } IP^*$$

3. Να βρεθεί ο αθροιστικός ενώπιος (cdf) της IP^* .

Η αθροιστική ενώπιος της IP^* ορίζεται ως:

$$F_{X^*}(x) := IP^*([-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Διαχειρίζονται τις παραπάνω περιπτώσεις.

$$\begin{aligned} x > 0, \quad F_{X^*}(x) &= IP^*([-\infty, x]) = IP^*([-\infty, x] \cap \text{supp } IP^*) = \\ &= IP^*([-\infty, x] \cap \{-\dots, -3, -2, -1, 0\}) = IP^*(\text{supp } IP^*) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0, \quad F_{X^*}(x) &= IP^*([-\infty, x] \cap \text{supp } IP^*) = IP^*([-\infty, x] \cap \{-\dots, -3, -2, -1, 0\}) = \\ &= IP^*(\text{supp } IP^* - \{0\}) = IP^*(\text{supp } IP^*) - IP^*(\{0\}) = \\ &= 1 - IP^*(\{0\}) \end{aligned}$$

Note! Av A \supseteq B τότε
 $IP(A - B) = IP(A) - IP(B)$

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1, \quad F_{X^*}(x) &= IP^*([-\infty, x] \cap \text{supp } IP^*) = \\ &= IP^*(\text{supp } IP^* - \{0\} - \{-1\}) = 1 - IP^*(\{0\}) - IP^*(\{-1\}) \end{aligned}$$

Εποκέντως, η cdf της IP^* είναι:

$$F_{X^*}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{|x|} IP^*(\{i\}), & x < 0, i \in \text{supp } IP^* \end{cases}$$

Όπου $|x|$: ο λεγανότητας αρχικών ανεργίας λιγότερος ή ίσος των x
π.χ. $x = -2.75$ τότε $|x| = -3$

(4)

Άσκηση 2 (Poisson ανό μεταρροία λε για χρήση αρρυθμών των καταναλωτών)

Έστω για μαραροή P λε $\text{supp } P = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και

$$P(\{x\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \text{supp}, \lambda > 0.$$

Έστω για των καταναλωτών:

$$X_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad X_2(x) = x^2.$$

1. Να βρεθεί το σχηματά της P^* ανό μεταρροία.

Υπογίασκαστε ότι το σχηματά της P^* θα είναι το εύρος $\{x^2\}$ για $\forall x \in \text{supp } P$. Επομένως, μαραροή λε $\text{supp } P^* = \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ δηλαδή $\text{supp } P^* = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$.

Υποδειζόντας το εύρος $\{x^2\}$ σαν σχηματά της P^* , πρέπει να δειγματούνται ότι για P^* ανό μεταρροία είναι κανός ορισμένη διαφορική μαραροή και να αποδειχθεί ότι το εγγεγραμμένο εύρος $\{x^2\}$ είναι ίσως σχηματά της P^* .

Για να είναι για P^* κανός ορισμένη διαφορική μαραροή πρέπει:

a. Το σχηματά της να είναι διαφορικό.

b. $\forall x_i \in \text{supp } P^*, P^*(\{x_i\}) > 0$.

c. $P^*(\text{supp}) = 1$

a) Το σχηματά της P^* τον έχουμε μαραροή λε $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ το οποίο είναι διαφορικό εύρος.

b) Ανό ορισμό μαραροής ανό μεταρροία γραπτούλε ότι:

$$P^*(A) = P(X^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{F}_R$$

Επομένως, σχηματά λε πρέπει να είναι:

$$P^*(\{x^2\}) = P(X^{-1}(\{x^2\}))$$

Ενιαίος, εύκρατη ή σε αριθμό των αντισημότητών είναις εξαίρετη:

$$X_2^{-1}(\{x^2\}) = \{x \in \mathbb{R} : X_2(x) = x^2\}$$

Για παραδειγμάτων μοδογίγιας για $x \in \text{supp } P$:

$$\begin{aligned} X_2(0) &= 0 & \Rightarrow X_2^{-1}(0) &= 0 & \text{NB } \overline{\delta \mathcal{D}} \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} \\ X_2(1) &= 1^2 & \Rightarrow X_2^{-1}(1^2) &= \pm 1 & \text{NB } \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} \\ X_2(2) &= 2^2 & \Rightarrow X_2^{-1}(2^2) &= \pm 2 & \text{NB } \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} \\ X_2(3) &= 3^2 & \Rightarrow X_2^{-1}(3^2) &= \pm 3 & \text{NB } \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\} \\ &\vdots & &\vdots & \vdots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι αντισημότητές των γεννήσεων $\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ συγκατίσουν τα γύρωτα $\{0, 1, 2, \dots\}$ και $\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

Συνεπώς, αν ο αριθμός αντισημότητών είναις παρατηρείται ότι:

$$P(X_2^{-1}(\{x^2\})) = P(\{x\} \cup \{-x\})$$

αριθμούς:

$$\{x\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad x \in \text{supp } P$$

$$\{-x\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

αριθμούς τα δύο γύρωτα δεν είναι ίστα, λεπτή τους ($\{x\} \cap \{-x\} = \emptyset$)

$$\text{τότε: } P(\{x\} \cup \{-x\}) = P(\{x\}) + P(\{-x\}) - P(\{x\} \cap \{-x\}) =$$

$$= P(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) + P(\{\dots, -3, -2, -1, 0\}) - P(\{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{\dots, -3, -2, -1, 0\}) =$$

$$= P(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) + P(\{\dots, -3, -2, -1, 0\}) - P(\{0\}) =$$

$$= P(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) + P(\{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\}) - P(\{0\}) =$$

* (αριθμούς $\{\dots, -3, -2, -1\} \cap \{0\} = \emptyset$, λόγω προσθετικότητας των P ισχύει ότι)

$$P(\{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\}) = P(\{\dots, -3, -2, -1\}) + P(\{0\})$$

$$= P(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) + P(\{\dots, -3, -2, -1\}) + P(\{0\}) - P(\{0\})$$

αριθμούς ως:

$$P(\{x\} \cup \{-x\}) = P(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) + P(\{\dots, -3, -2, -1\})$$

(6)

Όμως, γνωρίζουμε ότι το σύγχρονα της IP είναι $\text{supp } IP = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και ως εν τούτω, η IP αποδίδει μοναδικά π.διάνοια τα επόμενα $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ αφού $IP(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) = IP(\text{supp } IP) = 1$. Ενισχυόμενης όμως τα ερωτήσεις των ευόδων $\{\dots, -3, -2, -1\}$ δεν αριθμούν κανένα σύγχρονα της IP . Άλλα,

$$\begin{aligned} x \notin \text{supp } IP &\Rightarrow x \in \text{supp}' \Rightarrow \{x\} \subseteq \text{supp}' \stackrel{IP \text{ λειτουργία}}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow IP(\{x\}) \leq IP(\text{supp}') \Rightarrow \left(\begin{array}{l} IP(\text{supp}') = 1 - IP(\text{supp}) \\ \Rightarrow IP(\text{supp}') = 0 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow IP(\{x\}) \leq 0 \end{aligned}$$

αφού αλογείφατε ότι η IP αποδίδει μόνιμη π.διάνοια σε κάθε ερωτήσεις ευόδων των εργαγμάτων της.

αφού $IP(\{\dots, -3, -2, -1\}) = 0$.

Επομένως, κινητή παραλίων διαδικασία παραγίνεται ότι:

$$IP(X_2^{-1}(\{x^2\})) = IP(\{x\}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{δηλαδή πραγματεύεται αντίστροφη} \\ \text{ενίσχυση με το δεύτερο πρόσημο} \end{array} \right)$$

Άλλα,

$$IP^*(\{x^2\}) = IP(X_2^{-1}(\{x^2\})) = IP(\{x\}) = e^{-x} \frac{x^x}{x!} > 0$$

κλι. οριστικό παρανοήσις
κλι. μεταφορά

κλι. οριστικό
αντίστροφης ενίσχυσης

Δείχνεται ότι η IP^* αλογείφει αντίστροφη δεύτερη π.διάνοια σε κάθε σύγκειο των supp .

δ) Δείξουμε ότι IP^* αλογείφει τη μαρανούλη από μεταφορά IP^*

αλογείφει στο εύρος $\{x^2\} = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ μοναδικά π.διάνοια.

Αν τεχνώνται, τότε το εύρος των x^2 της IP^* θα είναι $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ Θα είναι όμως το $\text{supp } IP^*$ και η IP^* θα είναι μάλιστα οριστική διατερική μαρανούλη.

αφού

$$\begin{aligned} IP^*(\{0, 1, 4, 9, \dots\}) &= IP(X_2^{-1}(\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\})) = \\ &= \text{από οριστικό παρανοήσις από μεταφορά} \\ &= IP(\{0, 1, 2, 3, \dots\}) = IP(\text{supp } IP) = 1 \quad \underbrace{\text{Supp } IP}_{\text{Supp } IP} \end{aligned}$$

(7)

Συνεπώς, αρκεί να παρατηθεί ότι μεταφορά IP^* αποδίδει
αυστηρά θετική π.διανομή σε $x \in \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ και
αποδίδει λεπτή π.διανομή σε σύνολο αυτό, το οποίο
εγγίζει της παραπομπής ανόμετρη μεταφορά IP^* δείχνει:

$$\text{supp } \text{IP}^* = \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\} = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$$

2. Να βρεθεί IP^* .

$$\text{IP}^*(\{\varepsilon_x\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x^2}}{\sqrt{x!}}, \quad x \in \text{supp } \text{IP}^*$$

Επομένως, οι π.διανομές που αποδίδει η παραπομπή ανόμετρη μεταφορά IP^* για $x \in \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ είναι:

$$\text{για } x=0, \quad \text{IP}^*(\{\varepsilon_0\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{\sqrt{0!}} = e^{-\lambda}$$

$$\text{για } x=1, \quad \text{IP}^*(\{\varepsilon_1\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{\sqrt{1!}} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$\text{για } x=4, \quad \text{IP}^*(\{\varepsilon_4\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{\sqrt{4!}} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

⋮ ⋮

3. Να βρεθεί η αρθρωτή συμπεριηγή (cdf) της IP^* .

$$F_{X_2}(x) := \text{IP}^*(-\infty, x]) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \text{IP}^*(-\infty, x]) &= \text{IP}^*\left((-\infty, x] \cap \text{supp } \text{IP}^*\right) = \\ &= \text{IP}^*\left((-\infty, x] \cap \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}\right) = \\ &= \text{IP}^*\left((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\}\right) \end{aligned}$$

(8)

naiprouxe neperimeneis

$$x < 0, \text{ tote } (-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\} = \emptyset$$

$$\underline{\text{αρι}} F_{X_2}(x) = P^*((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\}) = P^*(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq x < 1, \text{ tote } (-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\} = \{0\}$$

$$\underline{\text{αρι}} F_{X_2}(x) = P^*((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\}) = P^*(\{0\})$$

$$1 \leq x < 4, \text{ tote } (-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\} = \{0, 1, 4\}$$

$$\underline{\text{αρι}} F_{X_2}(x) = P^*((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\}) = P^*(\{0, 1, 4\}) =$$

$$= P^*(\{0\} \cup \{1\}) \stackrel{\text{ηροσ}}{=} P^*(\{0\}) + P^*(\{1\})$$

$$4 \leq x < 9, \text{ tote } (-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\} = \{0, 1, 4, 9\}$$

$$\underline{\text{αρι}} F_{X_2}(x) = P^*((-\infty, x] \cap \{0, 1, 4, 9, \dots\}) = P^*(\{0, 1, 4, 9\}) =$$

$$= P^*(\{0\}) + P^*(\{1\}) + P^*(\{4\})$$

$$9 \leq x < 16$$

⋮ ⋮

αρι η αρθριστική συνάρτηση (cdf) της P^* είναι:

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \sum_{i=0}^{L(x)} P^*(\{i\}) & , x \geq 0, i \in \text{supp } P^* \end{cases}$$

όνου $L(x)$ είναι ο μεγαλύτερος κυρώσιμος μερισμός για τον χώρο x .

$$\underline{\text{π.χ.}} \quad \alpha \vee x = 5.9 \quad \text{tote} \quad L(5.9) = 5$$

Υπολογισμός Α. Δικτύων για την αριθμητική ευάρρηση (cdf)

Μεθοδολογία

1. Δίνεται η αριθμητική ευάρρηση F (αυθικά ή χωρίς cdf)
2. Εξετάζεται το κτ ή F είναι μετώπις ορισμένη δηλαδή στις μετανοούσι τις τρεις ιδιότητες (a, b, g) του θεωρητικού χαρακτηριστικού:

α) η F αύξουσα

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

γ) F από σειρά ευρεξις

3. Εφόσον η F είναι μετώπις ορισμένη, το θεωρητικό χαρακτηριστικό ευρενοίγεται ότι η F αναπροστάθηκε μεταρρυθμισμένης ΙΠ.
4. Εφόσον η F αναπροστάθηκε ΙΠ, μπορούμε, μέσω της f , να βρούμε ιδιότητες της ΙΠ μεταξύ της f , μέσω της F , μπορούμε να υπολογίσουμε τις η. δικτύων που αποδίδει η ΙΠ.

Υπερδιάλειχο !!

Θεωρήθα χαρακτηριστικού

Αν η ΙΠ μεταρρυθμισμένης ΙΠ είναι $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

η αριθμητική ευάρρηση της ΙΠ, τοπε η F μετανοοει τις εξις ιδιότητες:

α) Αύξουσα

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{(εγωμετρικές ιδιότητες)} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

γ) Από σειρά ευρεξις.

- Αριθμητικά, αν η $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μετανοοει τις a, b, g , τοπε μπορει μεταρρυθμισμένη μεταρρυθμισμένη ΙΠ είναι \mathbb{R} της οποιας f είναι αριθμητική

Όνως αναγρέψει παραπάνω, μέσω της F , μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαροή της που αποδίδει τη P .

Εγγραφής γνωριστής οτι:

$$F(x) = P(-\infty, x] \quad , \quad P(-\infty, x) = \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$$

Συνεπώς, τη πιθανότητα εγκείου x διαμερίζεις καταροής ορίζεται ως:

$$P(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$$

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, υπολογίσουμε τη διαροή της που αποδίδει τη παραπάνω δικείητη, μέσω της αρχειακής αναφράγεταις F .

- Έστω $A = (\alpha, \beta]$ και $P(A) = P((\alpha, \beta]) = f(\beta) - f(\alpha)$

νως ευέργορται:

$$(\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha]$$

$$\alpha < x \leq \beta$$

$$x \leq \beta \quad - \quad x \leq \alpha$$



ισότατα $P((\alpha, \beta]) = P((-∞, \beta] - (-∞, \alpha])$

όπως αφού $\alpha < \beta$, έχουμε οτι $(-\infty, \beta] \supset (-\infty, \alpha]$ και

γιατρούμε οτι τη P μετατρέπει την ευθεόθεωρη διαφορά

$$(-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha] \text{ σε ηεγκατική αρειαρεση } \underline{\text{και}} \text{ αφού } (-\infty, \beta] \supset (-\infty, \alpha]$$

$$\text{τότε } P((-∞, \beta] - (-∞, \alpha]) = P((-∞, \beta]) - P((-∞, \alpha])$$

ισότατα ευρούμε: $P(A) = P((\alpha, \beta]) = P((-∞, \beta]) - P((-∞, \alpha]) =$

$$= P((-∞, \beta]) - P((-∞, \alpha]) = F(\beta) - F(\alpha)$$

- Εάν $A = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε

$$\Rightarrow P(A) = P([\alpha, \beta]) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x)$$

πως γιαποκαί: $[\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha)$ και

$$(-\infty, \beta] \supset (-\infty, \alpha) \text{ αφού } \beta > \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{αφα } P([\alpha, \beta]) &= P((-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha)) = P((-\infty, \beta]) - P((-\infty, \alpha)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \beta^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x) \end{aligned}$$

- Εάν $A = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $P(A) = P([\alpha, \beta]) = F(\beta) - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x)$

πως αποδεικνυται:

$$[\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha) \text{ οπού } (-\infty, \beta] \supset (-\infty, \alpha) \text{ αφού } \alpha < \beta$$

αφα

$$\begin{aligned} P([\alpha, \beta]) &= P((-\infty, \beta] - (-\infty, \alpha)) = P((-\infty, \beta]) - P((-\infty, \alpha)) = \\ &= F(\beta) - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x) \end{aligned}$$

- Εάν $A = (\alpha, +\infty)$ οπού $A' = (-\infty, \alpha]$ αφα

$$P(A) = P((\alpha, +\infty)) = 1 - P((-\infty, \alpha]) = 1 - F(\alpha)$$

- Εάν $A = [\alpha, +\infty)$ οπού $A' = (-\infty, \alpha)$ αφα

$$P([\alpha, +\infty)) = 1 - P((-\infty, \alpha)) = 1 - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x)$$

- Εάν $A = \{\alpha, \beta\}$ και $P(\{\alpha, \beta\}) = P(\{\alpha\}) + P(\{\beta\}) =$

$$= f(\alpha) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} F(x) + f(\beta) - \lim_{x \rightarrow \beta^-} F(x)$$

Άσυμη

Εάν λ περιγράφεται ως χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Η λ θετική, γενετική συράπτηση (cdf) για την μαρκοπούλη Poisson (λ).

Διοριζεται: $\text{supp } P = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$P(\{\alpha\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}, \forall \alpha \in \text{supp } P, \lambda > 0$$

Aü6y

H αθροεινής ευαρέστης εγγυώμενης μαραθωνίς Poisson είναι:

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \text{supp } \mathbb{P}) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\})$$

Νερπινωγείς:

$$\begin{aligned} \text{αν } x < 0 : F(x) &= \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \text{supp } \mathbb{P}) = \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{αν } 0 \leq x < 1 : F(x) &= \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \text{supp } \mathbb{P}) = \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}) = \mathbb{P}(\{0\}) = e^{-\lambda} \end{aligned}$$

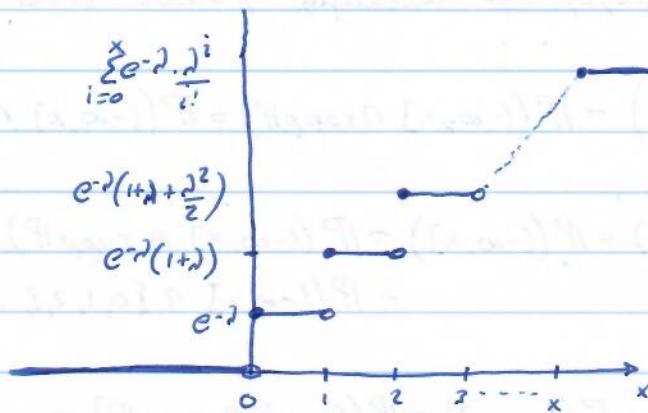
$$\begin{aligned} \text{αν } 1 \leq x < 2 : F(x) &= \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \text{supp } \mathbb{P}) = \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{0, 1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda} (1 + \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{αν } 2 \leq x < 3 : F(x) &= \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \text{supp } \mathbb{P}) = \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x] \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{0, 1, 2\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Όποιες γενικεύοντας, ναι προκύπτει ότι η cdf εγγυώμενης μαραθωνίς Poisson είναι:

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & , x < 0 \\ \sum_{i=0}^x \mathbb{P}(\{i\}) & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^x \frac{\lambda^i}{i!} & , x \geq 0, i \in \text{supp } \mathbb{P} \end{cases}$$

Γραφικά Αρθρογενής συναρτήσεις της Poisson(λ)



Η cdf της Poisson
είναι σταθερή μεταξύ
κλιμάκων και έχει
βηματικές αναλύσεις

Υπολογισμός πιθανοτήσεων της F

$$\text{η.γ. } \Pr(\{0\}) = F(0) - \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\{2\}) &= F(2) - \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} - \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-\lambda} \sum_{i=0}^x \frac{\lambda^i}{i!} = \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

Επιβεβαιώσεις ιδιοτήτων της F

Η αρθρογενής συναρτήση F για να είναι μετρός αριθμητικής συναρτήσης περιορισμένης μεταβλητής πρέπει να μαρνούσε τις ιδιότητες του δεμπήλατου χαρακτηρισμού. Ενοψέως, αποδεικνύονται ότι η F μαρνούσε τα α, β, γ του δεμπήλατου χαρακτηρισμούς να γίνεται, είναι μετρός αριθμητικής συναρτήσης της Poisson(λ).

(α) Φαίνεται ότι F αύξουσα πρέπει να είναι:

$$\text{αν } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$, αντίστροφες περιπτώσεις:

$$\cdot \text{ αν } x_1 < x_2 < 0, \text{ τότε } F(x_1) = F(x_2) = 0$$

$$\cdot \text{ αν } x_1 < 0 \leq x_2, \text{ τότε } F(x_1) = 0 < F(x_2) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x_2} \frac{\lambda^i}{i!} > 0 \text{ αφού } \lambda > 0$$

όποια $F(x_1) < F(x_2)$

$$\cdot \text{ αν } 0 < x_1 < x_2, \text{ τότε } F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x_1} \frac{\lambda^i}{i!} < e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x_2} \frac{\lambda^i}{i!}, \text{ αφού } \lambda > 0$$

καθώς $x_2 > x_1$

από $\therefore F(x)$ είναι αύξουσα (καθώς αύξουσα).

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\forall x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \text{ giazi } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ e^{-x} \sum_{i=0}^x \frac{x^i}{i!} \right\} = \\ = e^{-x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^x \frac{x^i}{i!} = e^{-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$$

Λ Aranzygta McLaurin cys e^x :
 $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \forall x \in \mathbb{R}$

μαν θέτω $x=2$ όπα $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} = e^2$

(C) Για να είναι η F ανό Σερία ενεχύσης πρέπει να ισχύει

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

$$\underline{\text{όπα}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ e^{-x} \sum_{i=0}^x \frac{x^i}{i!} \right\} = e^{-x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^x \frac{x^i}{i!} = e^{-x} \frac{x^0}{0!} = e^{-x}$$

$$F(0) = e^{-0}$$

$$\underline{\text{όπα}} \quad F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

όπα η F ανό Σερία ενεχύσης.