Φροντιστήριο 4

Υπενθύμιση κάποιων εννοιών (που είδαμε σε προηγούμενα φροντιστήρια/διαλέξεις)

- Αντίστροφη Εικόνα: Έστω συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A (μέσω της f) ως το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία απεικονίζονται, μέσω της f στο A.

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}.$$

- Τυχαίες Μεταβλητές

▶ $\boxed{\text{Ορισμός:}}$ Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται οποια συνάρτηση $X:\Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του (ή προ-εικόνα), μέσω της $X(\cdot)$,
$X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$.

• Δηλαδή οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στο Ω.
Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σ' έναν άλλο μετρήσιμο χώρο κι μας επιτρέπει να ορίσουμε τις πιθανότητες.

- Κατανομές από μεταφορά: Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Αν θέλουμε να προσάγουμε πιθανότητα σ' ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών, βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X και αποδίδουμε σ' αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον δειγματικό χώρο.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και η τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}$, X προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*(\cdot)$ που ορίζεται ως εξής:
Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

Άσκηση 1.

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και πραγματική συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου:

$$\Omega = \{a, b, c\} \quad , \quad \mathbb{P}(\{a\}) = p \quad , \quad \mathbb{P}(\{b\}) = q \text{ , όπου } p, q \in (0, \tfrac{1}{2})$$

και $$X(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \omega = a \\ 2 & , \text{αν } \omega = b \\ 3 & , \text{αν } \omega = c \end{cases}$$

1. Βρείτε το Σ_Ω.

2. Αν τα a, b, c είναι ξένα μεταξύ τους, βρείτε το $\mathbb{P}(\{c\})$ έτσι ώστε η $\mathbb{P}$ να είναι μέτρο πιθανότητας (δηλ. καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας).

3. Δείξτε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή.

4. Βρείτε την $\mathbb{P}^*$ που προκύπτει από μεταφορά της $\mathbb{P}$ μέσω της X.

5. Βρείτε το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$. Τι συμπέρασμα βγάζετε?

Λύση Άσκησης 1

1. Αφού το Ω είναι πεπερασμένο τότε κάθε υποσύνολό του θα είναι μετρήσιμο, άρα ως κατάλληλη συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων (Σ_Ω) μπορεί να θεωρηθεί το δυναμοσύνολό του, το οποίο είναι:

$$\Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$$

2. Από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας, για να είναι η $\mathbb{P}$ συνάρτηση πιθανότητας, θα πρέπει να ισχύει $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Επιπλέον, θα πρέπει να ισχύει ότι οι πιθανότητες είναι μη-αρνητικές καθώς κι η ιδιότητα της προσθετικότητας.

Έχουμε $\Omega = \{\alpha, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Επειδή τα στοιχειώδη σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα έχουμε:

$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}) \Rightarrow$ (από την ιδιότητα της προσθετικότητας)

$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{\alpha\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) \Rightarrow$ (από την ιδιότητα της ενοποίησης)

$\Rightarrow 1 = p + q + \mathbb{P}(\{c\}) \Rightarrow \mathbb{P}(\{c\}) = 1 - p - q$

παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}(\{c\}) > 0$ αφού $p, q \in (0, \frac{1}{2})$, άρα βρήκαμε την $\mathbb{P}(\{c\})$ έτσι ώστε η $\mathbb{P}$ να είναι μέτρο πιθανότητας

3. Σύμφωνα με τον ορισμό η $X: \Omega \to \mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\Omega}$.

Επομένως, για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } 1,2,3 \notin A \\ \{\alpha\}, & \text{αν } 1 \in A,\ 2,3 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 2 \in A,\ 1,3 \notin A \\ \{c\}, & \text{αν } 3 \in A,\ 1,2 \notin A \\ \{\alpha, b\}, & \text{αν } 1,2 \in A,\ 3 \notin A \\ \{\alpha, c\}, & \text{αν } 1,3 \in A,\ 2 \notin A \\ \{b, c\}, & \text{αν } 2,3 \in A,\ 1 \notin A \\ \Omega, & \text{αν } 1,2,3 \in A \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\Omega}$. Επομένως, η X είναι τυχαία μεταβλητή.

4. Η συνάρτηση από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \quad , \forall A \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$$

Επομένως,

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & , \text{αν } 1,2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a\}) = p & , \text{αν } 1 \in A,\ 2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b\}) = q & , \text{αν } 2 \in A,\ 1,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{c\}) = 1-p-q & , \text{αν } 3 \in A,\ 1,2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a,b\}) = p+q & , \text{αν } 1,2 \in A,\ 3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a,c\}) = 1-q & , \text{αν } 1,3 \in A,\ 2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b,c\}) = 1-p & , \text{αν } 2,3 \in A,\ 1 \notin A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & , \text{αν } 1,2,3 \in A \end{cases}$$

5. Το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο στο οποίο η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Επομένως, όπως βλέπουμε παραπάνω, το μικρότερο τέτοιο σύνολο είναι το $\{1,2,3\}$ το οποίο είναι κλειστό (ως πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) Άρα, $supp\,\mathbb{P}^* = \{1,2,3\}$ αφού από το προηγούμενο ερώτημα παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}^*(\{1,2,3\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Για $A \subset \{1,2,3\}$, η $\mathbb{P}^*$ δεν αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε παραπάνω. Επομένως, ένα οποιοδήποτε σύνολο $A \subset \{1,2,3\}$ δεν μπορεί να είναι στήριγμα της $\mathbb{P}^*$. Άρα, το σύνολο $\{1,2,3\}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Συνεπώς, $\{1,2,3\}$ είναι το supp της $\mathbb{P}^*$.

- Στήριγμα (support) κατανομής

Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$. Το στήριγμα (supp) αυτής είναι το μικρότερο κλειστό και μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα.

· Το στήριγμα διευκολύνει την διαδικασία περιγραφής μιας κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και την απόδοση πιθανοτήτων καθώς ξέρουμε ότι ισχύει:

αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)}$ (δείτε διαλέξεις για απόδειξη)

· Επίσης, ανάλογα με την μορφή που μπορεί να πάρει το στήριγμα, μας παρέχει κατηγοριοποίηση των κατανομών στο $\mathbb{R}$.

→ διακριτές κατανομές (διακριτό supp)
→ συνεχείς κατανομές (supp διάστημα ή ένωση διαστημάτων)
→ μεικτές κατανομές (το supp έχει δύο μέρη μεταξύ τους ξένα, διακριτό & συνεχές)

Διακριτές κατανομές → διακριτό supp της μορφής: $supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

Πόρισμα (απόδειξη στις διαλέξεις)

Μια διακριτή κατανομή αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της, $supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ άρα

$\mathbb{P}(\{x_i\}) > 0, \quad \forall x_i \in supp$

Μεθοδολογία

Για να μελετήσουμε μία διακριτή κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει:

α. να γνωρίζουμε το στήριγμά της (supp)

β. να γνωρίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η κάθε κατανομή σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της

Άρα, άμα ξέρουμε τα α, β μπορούμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα κάθε ενδεχομένου $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τα α και β τότε για να αποδείξουμε ότι η κατανομή είναι διακριτή και καλώς ορισμένη θα πρέπει:

1. Το στήριγμα της να είναι διακριτό
2. $\forall x_i \in supp, \mathbb{P}(\{x_i\}) > 0$
3. $\mathbb{P}(supp) = 1$.

<u>Παραδείγματα Διακριτών κατανομών</u>

Στο φροντιστήριο ασχοληθήκατε περισσότερο με παραδείγματα σχετικά με την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Για Bernoulli και Διωνυμική (Binomial), υπάρχουν πολλά παραδείγματα στις διαλέξεις.

Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda \to Poiss(\lambda)$

Δίνονται: - $supp = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}, \lambda > 0$

Τα παραπάνω περιγράφουν μια καλώς ορισμένη κατανομή?

Πρέπει να ελέγξουμε τις τρεις απαιτήσεις που έχουμε ώστε η κατανομή να είναι διακριτή και καλώς ορισμένη.

1. Το supp είναι διακριτό αφού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$) που ξέρουμε ότι είναι διακριτό σύνολο.
2. $\mathbb{P}(\{i\}) > 0$ αφού $\mathbb{P}(\{i\}) = \underbrace{e^{-\lambda}}_{>0} \dfrac{\lambda^i}{i!}$ και $\lambda > 0$, $i \in \mathbb{N}$ άρα ισχύει
3. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \dots =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \dots + e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \dots =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} + \dots\right) =$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}} \overset{(*)}{=} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Mclaurin (θέτοντας $x = \lambda$)

(*) Ανάπτυγμα Mclaurin της e^x:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

<u>Υπενθύμιση</u>

$$i! = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 0, 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots i, & \text{αν } i > 0 \end{cases}$$

<u>Παραδείγματα Υπολογισμού πιθανοτήτων για την Poisson(λ)</u>

Έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ πώς $\mathbb{P}(A)$??

<u>π.χ.</u>

- αν $A=(0,1)$: $\mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}((0,1)\cap supp) = \mathbb{P}((0,1)\cap\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- αν $A=\{0,1\}$: $\mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap supp) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap \mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap\{0,1,2,3,\dots\}) =$

$$= \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}\cup\{1\}) \overset{\text{προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} + \lambda\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

- αν $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2=1\} = \{-1,1\}$

άρα $\mathbb{P}(\{x\in\mathbb{R} : x^2=1\}) = \mathbb{P}(\{-1,1\}) = \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap supp) = \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\mathbb{N}) =$

$$= \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \lambda\cdot e^{-\lambda}$$

- αν $A=\mathbb{Z}$ ή $A=\mathbb{Q}$ τότε

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(supp) = 1$$

αντίστοιχα $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}(\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(supp) = 1$

* <u>Νote</u>: ισχύει $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας το supp και το $\mathbb{P}(\{i\})$ που μας δόθηκε μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε διάστημα των πραγματικών $\in \Sigma_{\mathbb{R}}$. Κάποια πιο περίπλοκα παραδείγματα:

- Αν $A=(-2,-1)\cup(1,3/2)$: $\mathbb{P}((-2,-1)\cup(1,3/2)) = \mathbb{P}[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap supp] =$

$$= \mathbb{P}[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap\{0,1,2,\dots\}] = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Δηλαδή, η κατανομή Poisson αποδίδει μηδενική πιθανότητα σ' αυτό το διάστημα.

- Αν $A=(-2,-1)\cup[1,3/2))$ ποια η πιθανότητα του A, $\mathbb{P}(A)$;

$$\mathbb{P}((-2,-1)\cup[1,3/2)) = \mathbb{P}[((-2,-1)\cup[1,3/2))\cap\overset{\text{supp}}{\{0,1,2,\dots\}}] = \mathbb{P}(\{1\}) =$$
$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$$

Αν η παράμετρος $\lambda=\frac{1}{2}$ τότε $\Rightarrow \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}\cdot e^{-1/2}$

- Ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}((-2,-1)\cup[1,3])$??

έχουμε $A=(-2,-1)\cup[1,3]$

άρα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((-2,-1)\cup[1,3]) = \mathbb{P}[((-2,-1)\cup[1,3])\cap\{0,1,2,\dots\}) = \mathbb{P}(\{1,2,3\}) \overset{\text{προσθετικότητα}}{=}$$

$$= \mathbb{P}((\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} =$$

Δώστε: $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $2! = 1\cdot 2 = 2$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda + e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2} + e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^3}{6} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}\right)$$

Αν π.χ. $\lambda=1$ τότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((-2,-1)\cup[1,3]) = e^{-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{10}{6}\cdot\frac{1}{e}$

QS: Πόσες κατανομές Poisson υπάρχουν ??

Απάντηση

Μπορούν να υπάρξουν τόσες κατανομές Poisson όσες και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το λ στο διάστημα $(0,+\infty)$.
Συνεπώς, τα προηγούμενα παραδείγματα ανήκουν στην οικογένεια κατανομών Poisson με παράμετρο λ.

Γενικότερα, στο στατιστικό πρόβλημα αν γνωρίζουμε σε ποια οικογένεια ανήκει η εκάστοτε κατανομή (π.χ. Poisson) τότε πρέπει να βρούμε την παράμετρό της (λ). Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης κατανομής ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης παραμέτρου.

Κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς ($\mathbb{R}$)

Πολλές φορές υπάρχει δυσκολία περιγραφής τόσο των διακριτών κατανομών αλλά κυρίως των συνεχών και μεικτών κατανομών. Για τον λόγο αυτό, χρειαζόμαστε πιο "οικείες" έννοιες, προκειμένου να περιγράψουμε μία κατανομή. Η πρώτη έννοια που συναντάμε είναι αυτή της Αθροιστικής συνάρτησης.

Αθροιστική Συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function - cdf)

Ορισμός: Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ επί του $\mathbb{R}$. Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής (cdf) είναι η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) \,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

· Εφόσον $(-\infty,x]\in\Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε η $\mathbb{P}((-\infty,x])$ υπάρχει και είναι καλώς ορισμένη, που σημαίνει ότι ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας και την αναπαριστά πλήρως.

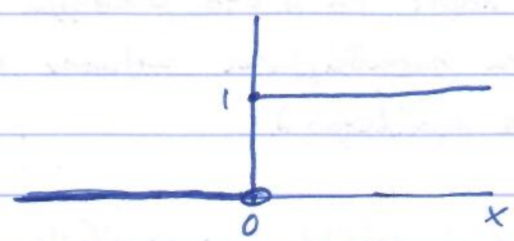
π.χ. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1 \,,\ supp(\mathbb{P}) = \{0\}$$

Έχουμε ότι $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x]\cap\{0\}) =$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) &, \text{αν } x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}) &, \text{αν } x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 &, \text{αν } x<0 \\ 1 &, \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

Γράφημα cdf



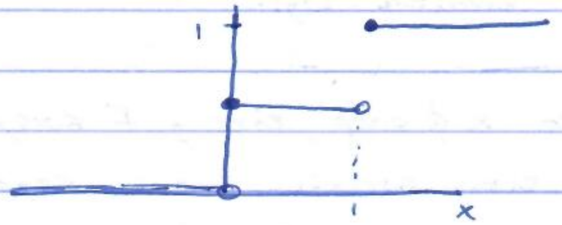
π.χ. $Ber(q)$ ως Bernoulli με παράμετρο q

- $supp(Ber) = \{0,1\}$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap supp) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \{0,1\}) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & , x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}) & , 0 \le x < 1 \\ \mathbb{P}(\{0,1\}) & , x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1-q & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Γράφημα cdf



Ιδιότητες
- μη φθίνουσα
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\forall x<0$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\forall x \geq 1$

Παρατηρούμε ότι και στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, οι cdf είναι αύξουσες, ασυνεχείς σε σημεία, αλλά είναι παντού συνεχείς από δεξιά.

Θεώρημα Χαρακτηρισμού

Αν η $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η αθροιστική της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Η F είναι αύξουσα (δηλ. αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$)
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. Η F είναι από δεξιά συνεχής (δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to x^+} F(y) = F(x)$)

- Αντίστροφα, αν κάποια $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2,3 τότε είναι η αθροιστική συνάρτηση (cdf) μοναδικής κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$.

- Σε κάθε κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ αντιστοιχεί μοναδική αθροιστική συνάρτηση F και σε κάθε συνάρτηση F που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 2, 3 αντιστοιχεί μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$.
Αυτό σημαίνει ότι η F αναπαριστά "τέλεια" την $\mathbb{P}$. Οπότε,
(α) μέσω της F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$
(β) οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε σχετικές ιδιότητες της F.

Κάποια χρήσιμα πορίσματα που προκύπτουν και αποδεικνύονται στις διαλέξεις είναι τα εξής:

- Πόρισμα: Αν το $x \notin supp$, τότε η F συνεχής στο x.
Δηλαδή, η F είναι συνεχής εκτός στηρίγματος.
Αυτό προκύπτει αφού αποδεικνύεται ότι η F ασυνεχής στο x ανν $\mathbb{P}(\{x\}) \neq 0$. Οπότε, ισοδύναμα, η F συνεχής στο x ανν $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
Ωστόσο, στις διακριτές κατανομές, σε κάθε στοιχείο x του $supp$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. Άρα, η F είναι ασυνεχής στα σημεία x όπως παρατηρήσαμε και νωρίτερα. Επομένως, καταλήγουμε στο επόμενο πόρισμα.
- Πόρισμα: Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή κατανομή, η F θα είναι ασυνεχής σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος ($supp$) της κατανομής.

- Μπορεί να αποδειχθεί ακόμη: - η F σταθερή εκτός στηρίγματος ($supp$)
  - η F γνησίως αύξουσα εντός του στηρίγματος