Φροντιστήριο 3

Έστω δύο σύνολα X, Y και ένας κανόνας f ο οποίος σε κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $y = f(x) \in Y$. Ο κανόνας f ονομάζεται συνάρτηση (ή απεικόνιση ή μετασχηματισμός) από το X στο Y.
Συμβολίζεται ως $f: X \to Y$, όπου X: πεδίο ορισμού
Y: πεδίο τιμών.

- Το σύνολο $R(f) = \{y \in Y \mid y = f(x)\}$ ονομάζεται σύνολο τιμών της f. Ισχύει ότι $R(f) \subseteq Y$.

- Για $x \in X$, το στοιχείο $y = f(x) \in Y$ ονομάζεται εικόνα του x μέσω της f ή απλώς τιμή της f στο x.
- Επίσης, το $x \in X$ ονομάζεται προ-εικόνα του y.

π.χ.
Έστω $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ και $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$
Έστω συνάρτηση $f: X \to Y$ που ορίζεται ως εξής:
$f(x_1) = f(x_2) = y_1$
$f(x_3) = y_3$

- Το σύνολο τιμών $R(f) = \{y_1, y_3\} \subseteq Y$

- Το σύνολο των προ-εικόνων (αντίστροφων εικόνων) του y_1 ορίζεται ως:

$f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2\}$ (το οποίο είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού X)

$f^{-1}(y_2) = \emptyset$

$f^{-1}(y_3) = \{x_3\}$

Ορισμός εικόνας & προ-εικόνας

Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$ και $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$.

- Ορίζουμε ως εικόνα του συνόλου A, κάτω από την f, το υποσύνολο $f(A)$ του Y, $f(A) \subseteq Y$, που ορίζεται ως εξής:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x)\}$$

Προφανώς, $f(A) \subseteq Y$ (πεδίου τιμών).

- Αντίστοιχα, ορίζουμε ως προ-εικόνα του συνόλου B, κάτω από την f, το υποσύνολο $f^{-1}(B)$ του X, $f^{-1}(B) \subseteq X$, που ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Προφανώς, $f^{-1}(B) \subseteq X$ (πεδίου ορισμού).

- Σε όρους θεωρίας πιθανοτήτων, ο αντίστοιχος ορισμός της προ-εικόνας ή αντίστροφης εικόνας είναι ο ακόλουθος.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Αντίστροφη εικόνα

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega \neq \emptyset$ και ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Έστω συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της f, ως το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A. Δηλαδή,

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$$

Παραδείγματα

Έστω $\Omega = \mathbb{R}$ και $f(\omega) = \omega^2$.

- Όταν $A = \{0\}$, η αντίστροφη εικόνα είναι:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 0\} =$$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 0\} = \{0\}$$

- Όταν $A = \{1\}$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 1\} =$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

- Όταν $A = [1,4]$: $f^{-1}([1,4]) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in [1,4]\} =$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in [1,4]\} =$$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : 1 \leq \omega^2 \leq 4\} = [-2,-1] \cup [1,2]$$

- Όταν $A = (-\infty, 0)$: $f^{-1}(A) = f^{-1}((-\infty,0)) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in (-\infty, 0)\} =$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in (-\infty, 0)\} = \emptyset$$ διότι $\omega^2 \geq 0$ πάντα

- Όταν $A = \mathbb{R}$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \mathbb{R}\} =$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

- Όταν $A = \emptyset$: $f^{-1}(A) = f^{-1}(\emptyset) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \emptyset\} =$

$$= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \emptyset\} = \emptyset$$

· **Note!!**

Αν το A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού Ω τότε το $f(A)$ είναι το υποσύνολο του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$ που αποτελείται από όλες τις εικόνες των στοιχείων του A. Λέμε το $f(A)$ είναι εικόνα του A.
Αντίθετα, η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου B του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$, κάτω από μία συνάρτηση f, είναι το υποσύνολο του πεδίου ορισμού Ω που ορίζεται από την $f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega : f(\omega)\in B\}$.

Τυχαίες Μεταβλητές (Random variables)

Η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με τη μελέτη φαινομένων που υπόκεινται σε αβεβαιότητα και προσπαθεί να ποσοτικοποιήσει την αβεβαιότητα σχετικά με ένα τυχαίο πείραμα. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού ή η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής δεν μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα.
Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται τυχαίες ή στοχαστικές.
Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται σε κάποιο δειγματικό χώρο Ω.

Στην περίπτωση του ζαριού έχουμε $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και στην περίπτωση της μετοχής έχουμε $\Omega=[-0.10,\ 0.10]$.
Όπως έχουμε αναφέρει σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχούμε μία πιθανότητα p_i και συμβολίζουμε ως εξής: $p_i = \mathbb{P}(X=x_i)$, όπου p_i είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή x_i.

· **Άρα**, η τυχαία μεταβλητή δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων (Σ_Ω) του Ω (πεδίου ορισμού της) και των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$ - πεδίο τιμών της).

· Πρόκειται για μία έννοια ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών στους πραγματικούς.

• **Ορισμός**: Τυχαία Μεταβλητή

Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$.
Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του (ή προ-εικόνα), μέσω της $X(\cdot)$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$.

• Δηλαδή, οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της τυχαίας μεταβλητής X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στον δειγματικό χώρο Ω.

• Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σ' έναν άλλο μετρήσιμο χώρο και μας επιτρέπει να ορίσουμε νέες πιθανότητες.

Παραδείγματα

1. Έστω $\Omega = \{\alpha, b\}$, $\quad \Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\{a\}, \{b\}, \Omega, \phi\}$
και τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$
όπου $X(\alpha) = 0$ και $X(b) = 1$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \phi, & \text{αν } 0,1 \notin A \\ \{\alpha\}, & \text{αν } 0 \in A,\ 1 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 0 \notin A,\ 1 \in A \\ \Omega, & \text{αν } 0,1 \in A \end{cases}$

όπου $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$

Συνεπώς, αφού $\phi, \Omega, \{\alpha\}, \{b\} \in \Sigma_\Omega$, η X είναι τυχαία μεταβλητή.

Γιατί?? Επειδή όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, η αντίστροφη εικόνα του, μέσω της συνάρτησης $X(\cdot)$ που ορίσαμε, ανήκει στη συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$. Επομένως, η πραγματική συνάρτηση που ορίσαμε ικανοποιεί τη συνθήκη που απαιτείται κάτω ορισμό, ώστε η συνάρτηση X να 'ναι τυχαία μεταβλητή.

2. $\Omega = \{\kappa\}$, $\Sigma_\Omega = \{\phi, \Omega\}$
και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$
όπου $X(\kappa) = c$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \phi, & \text{αν } c \notin A \\ \Omega, & \text{αν } c \in A \end{cases}$

Έστω $c = 6$. Να βρεθεί η $X^{-1}(A)$, $X^{-1}(B)$, $X^{-1}(\Gamma)$, $X^{-1}(\Delta)$
για $A = (-4,-2) \cup (0,3) \Rightarrow X^{-1}(A) = \phi$, $6 \notin A$

$B = (4,5) \cap \{6\} \Rightarrow X^{-1}(B) = \phi$, $6 \notin B$

$\Gamma = (0,6] \Rightarrow X^{-1}(\Gamma) = \Omega$, $6 \in \Gamma$

$\Delta = (4,5) \cup \{6\} \Rightarrow X^{-1}(\Delta) = \Omega$, $6 \in \Delta$

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω ορισμός θέτει στην συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ την απαίτηση ότι η αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(A)$, ~~για~~ $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, να ανήκει στο Σ_Ω (δηλαδή μία συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω), προκειμένου να ονομάσουμε την X τυχαία μεταβλητή. Αυτή η συνθήκη έχει πραγματική ισχύ μόνο στην περίπτωση κατά την οποία ο χώρος ενδεχομένων (Σ_Ω) δεν ταυτίζεται με το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου 2^Ω.
Όταν ο δειγματικός χώρος Ω είναι είτε πεπερασμένος ή διακριτός, οπότε το Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να εμπεριέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, δηλαδή ο χώρος ενδεχομένων να είναι το δυναμοσύνολο του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή γιατί για οποιαδήποτε συνάρτηση X, όλες οι προ-εικόνες $X^{-1}(A)$ θα είναι υποχρεωτικά μέλη του δυναμοσυνόλου του Ω, δηλαδή $X^{-1}(A)$ θα ανήκει στο $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$.

2. Υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές.

π.χ. όταν $(\Omega, \Sigma_\Omega) = (\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $A \notin \Sigma_{\mathbb{R}}$.

3. Η προ-εικόνα $X^{-1}(A)$, όπου $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, απεικονίζει σύνολα του πεδίου τιμών ($\mathbb{R}$) σε υποσύνολα του δειγματικού χώρου (Σ_Ω). Αναφορικά με την απεικόνιση $X^{-1}(\cdot)$ ισχύει ότι:

Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε

$$[X^{-1}(A)] \cap [X^{-1}(B)] = \emptyset$$

4. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής και παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα, οι "οικείες" συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει είναι τυχαίες μεταβλητές.

<u>Κατανομές από Μεταφορά</u>

- Μέσω των τυχαίων μεταβλητών, είναι δυνατή η μεταφορά των κατανομών $\mathbb{P}$ από αυθαίρετους χώρους στην πραγματική ευθεία, η οποία έχει πλούσια μαθηματική δομή. Ουσιαστικά, οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς.

- Αν θέλουμε να προσάγουμε πιθανότητα σ' ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών ($A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$), βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X (δηλ. $X^{-1}(A)$) και αποδίδουμε σε αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον δειγματικό χώρο.

Ορισμός: Κατανομή από μεταφορά

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και η τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*$ που ορίζεται ως εξής:
Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.

Παρατηρήσεις

1. Η $\mathbb{P}^*$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο $\mathbb{R}$ εξαιτίας του ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο Ω. Ονομάζεται κατανομή από μεταφορά της $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$, μέσω της τυχαίας μεταβλητής X.

2. Συνήθως, η $\mathbb{P}^*$ ονομάζεται ως η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή X $(X \sim \mathbb{P}^*)$, αγνοώντας την υφιστάμενη $\mathbb{P}$.

3. Εφόσον μπορούμε να μεταφέρουμε κατανομές στους πραγματικούς μέσω τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε καταρχάς να μελετάμε κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ όπου υπάρχει πλούσια μαθηματική δομή.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$ όταν: $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3}$
και συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $X(K) = 3$, $X(\Gamma) = 4$

Βήμα 1: Βρίσκουμε Σ_Ω, $\mathbb{P}(\{\Gamma\})$

$\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega\} = 2^\Omega$ (δυναμοσύνολο του Ω)

Ξέρουμε ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του δειγματικού χώρου Ω άρα η $\mathbb{P}$ ικανοποιεί και τις 3 ιδιότητες που χρειάζονται για να είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας.

Άρα,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{K, \Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\} \cup \{\Gamma\}) \overset{\text{ιδιότητα προσθετικότητας}}{=} \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \overset{\text{(ιδιότητα κανονικοποίησης)}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \Rightarrow \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3}$$

Βήμα 2 : Υπολογίζουμε τις αντίστροφες εικόνες

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε η αντίστροφη εικόνα του A δίνεται ως εξής:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

άρα

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & , \text{αν } 3,4 \notin A \\ \{K\} & , \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \{\Gamma\} & , \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \\ \Omega & , \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$ αφού $\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega \in \Sigma_\Omega$ άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή.

Βήμα 3 : Υπολογίζουμε την $\mathbb{P}^*(A)$

όπου $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

άρα

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & , \text{αν } 3,4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3} & , \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3} & , \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & , \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$

Άσκηση 1

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$ και πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου:

$\Omega = \{\alpha, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = p$, $\mathbb{P}(\{b\}) = q$ όπου $p, q \in (0, \frac{1}{2})$

και $X(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \omega = a \\ 2 & , \text{αν } \omega = b \\ 3 & , \text{αν } \omega = c \end{cases}$

1. Βρείτε το Σ_Ω.

2. Αν τα α, b, c είναι ξένα μεταξύ τους, βρείτε το $\mathbb{P}(\{c\})$ έτσι ώστε η $\mathbb{P}$ να είναι μέτρο πιθανότητας (δηλ. καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας).

3. Δείξτε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή.

4. Βρείτε την $\mathbb{P}^*$ που προκύπτει από μεταφορά της $\mathbb{P}$ μέσω της X.

5. Βρείτε το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$. Τι συμπέρασμα βγάζετε?

Άσκηση 2

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$ και συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου:

$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \omega = a \\ 2 & , \text{αν } \omega = b \\ 2 & , \text{αν } \omega = c \end{cases}$

Απαντήστε στα ερωτήματα 1, 3, 4, 5 της προηγούμενης άσκησης.