Διδάσκων: Αρβανίτης Σ.
Βοηθός Μαθήματος: Ψαρτζής Ν.

Φροντιστήριο 1-2

- Κύριο αντικείμενο της Θεωρίας Πιθανοτήτων → μελέτη τυχαίων φαινομένων δηλαδή πειραμάτων τύχης → ονομάζονται έτσι γιατί σε μία εκτέλεση του πειράματος δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Όμως, μπορούμε να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

πειράματα τύχης:

π.χ. ρίψη ενός ζαριού → δεν ξέρουμε ακριβώς ποιο από τα 6 δυνατά αποτελέσματα θα εμφανιστεί

ή

π.χ. όταν αγοράζουμε κάποια συσκευή → δεν γνωρίζουμε ποιος θα είναι ακριβώς ο χρόνος ζωής της

- Η Θεωρία Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί έννοιες από την Θεωρία Συνόλων.

Θεωρία Συνόλων

▶ **Ορισμός**: Σύνολο: Ως σύνολο ορίζεται μία συλλογή από στοιχεία.

(*) Κάθε σύνολο το αντιμετωπίζουμε ως μία ενιαία και αυτοδύναμη οντότητα διαφορετική από τις επιμέρους οντότητες (στοιχεία) που το συνθέτουν.

π.χ. Ένα σύνολο $B = \{p, s, t\}$ μπορεί να συμπεριληφθεί ως στοιχείο σε κάποιο άλλο σύνολο, για παράδειγμα $C = \{B, s\}$.

- Ένα σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$.

Παραδείγματα

1) Το σύνολο $A = \{$Κυριακή, Δευτέρα, ..., Σάββατο$\}$ ή εναλλακτικά
$B = \{x \mid x$ είναι οι μέρες της εβδομάδας$\}$

2) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ή εναλλακτικά
$\mathbb{N} = \{\alpha \mid \alpha$, είναι φυσικός αριθμός$\}$

3) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q} = \{ z = \frac{\alpha}{\beta} \,|\, \alpha$, είναι ακέραιος και β μη-μηδενικός ακέραιος$\}$

4) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών α και b, το οποίο δεν περιλαμβάνει τους α και b, άρα $(\alpha, b) = \{ x \,|\, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha < x < b$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$, με $\alpha < b \}$

παράδειγμα 1 $\rightarrow$ πεπερασμένο πλήθος στοιχείων
παραδείγματα 2, 3, 4 $\rightarrow$ άπειρο πλήθος στοιχείων

⊛ Πάντα, ισχύει $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

⊛ Μπορεί να γίνει μία περαιτέρω διάκριση ως προς τα σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{N}$ και το σύνολο $\mathbb{R}$ έχουν και τα δύο άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, το $\mathbb{R}$ υπό κάποια έννοια έχει "περισσότερα" στοιχεία από το $\mathbb{N}$. (περισσότερα παρακάτω).

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Ισότητα Συνόλων

Δύο σύνολα A, B θα λέγονται ίσα, $A = B$, εάν αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία.

π.χ. 1. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι ίσο με $B = \{\gamma, \beta, \delta, \alpha\}$ (η διάταξη των στοιχείων δεν παίζει ρόλο.

2. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι ίσο με $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta, \gamma\}$ (η καταγραφή ενός στοιχείου περισσότερες της μιας φοράς δεν αλλοιώνει το σύνολο)

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Υποσύνολο Συνόλου

Έστω σύνολο A θα λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B και θα συμβολίζεται $A \subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Σε μία τέτοια περίπτωση μπορούμε να λέμε ότι το B περιέχει το A.

· Ο παραπάνω ορισμός δεν αποκλείει την περίπτωση $B \subseteq A$. Μπορούν δηλαδή να ισχύουν ταυτόχρονα $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αυτό συμβαίνει ανν $A = B$.

· Αν $A \subseteq B$ και ταυτόχρονα $A \neq B$ τότε λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και το συμβολίζουμε με $A \subset B$.

Παραδείγματα

1. Έστω σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
Τα υποσύνολα $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$ ονομάζονται στοιχειώδη υποσύνολα του A.

(*) Το $\{\alpha\}$ είναι διαφορετική οντότητα από το α. Το πρώτο είναι υποσύνολο συνόλου ενώ το δεύτερο στοιχείο συνόλου.
Ισχύουν ότι $\{\alpha\} \subset A$ και $\alpha \in A$.

2. Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Ισχύουν $\{\alpha\} \subset A$, $\{\alpha, \beta\} \subset A$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq A$.

3. Έστω $A = \{\{1\}, 2\}$. Ισχύουν: $\{1\} \in A$, $1 \notin A$, $2 \in A$, $\{2\} \subset A$, $\{\{1\}\} \subset A$

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ Δυναμοσύνολο Συνόλου
Έστω σύνολο $A \neq \emptyset$. Το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του A, συμπεριλαμβανομένου και του $\emptyset$, ονομάζεται δυναμοσύνολο του A και συμβολίζεται με 2^A ή $P(A)$.

Παραδείγματα

① Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Το δυναμοσύνολο του συνόλου A είναι το:
$$2^A = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \underbrace{\{\alpha, \beta, \gamma\}}_{A}, \emptyset\}$$

· Παρατηρούμε ότι το δυναμοσύνολο 2^A ή $P(A)$ περιέχει ως στοιχείο το ίδιο το A και το $\emptyset$.
· Γενικά, το δυναμοσύνολο ενός συνόλου περιέχει πάντα το ίδιο το σύνολο και το $\emptyset$.

(*) Για ένα οποιοδήποτε σύνολο X, με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, n, ο αριθμός των στοιχείων του δυναμοσυνόλου 2^X (ή $P(X)$) είναι ίσος με 2^n.

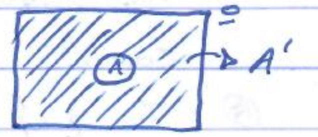
② Έστω σύνολο $B = \mathbb{N}$. Το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι το:
$$2^{\mathbb{N}} (\text{ή } P(\mathbb{N})) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\} \ldots\}$$

• Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου παρατηρούμε ότι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου είναι ένα "ιδιαίτερο" σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι επίσης σύνολα.

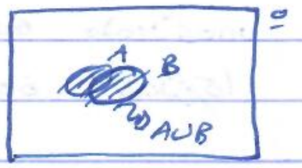
Συνολοθεωρητικές σχέσεις & πράξεις (περισσότερα στις διαλέξεις)

Βασικές πράξεις συνόλων:

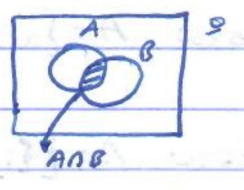
1. Συμπλήρωμα συνόλου: $A' = \{x \mid x \in \Omega$ και $x \notin A\}$



2. Ένωση συνόλων: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ή $x \in B\}$

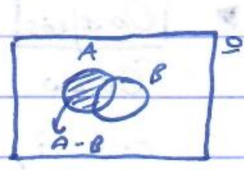


3. Τομή συνόλων: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ και $x \in B\}$



⊙ Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A και B ονομάζονται αμοιβαίως αποκλειόμενα ή ξένα μεταξύ τους. Δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο τα σύνολα A και B.

4. Διαφορά συνόλων: $A - B = \{x \mid x \in A$ και $x \notin B\}$



Παραδείγματα

1) Έστω τα κλειστά διαστήματα πραγματικών αριθμών $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ με $\alpha < \beta < \gamma$.
Οι οντότητες $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ εκφράζουν σύνολα πραγματικών αριθμών. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε την πράξη: $[\alpha, \beta] \cup [\beta, \gamma] = [\alpha, \gamma]$ ή $[\alpha, \beta] \cup \{\beta\} = [\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta] \cap [\beta, \gamma] = \{\beta\}$

Επίσης, αν θεωρήσουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}$ τότε, το συμπλήρωμα του $[\alpha, \beta]$ ως προς το $\mathbb{R}$ είναι το $[\alpha, \beta]' = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$

2) Έστω (α, β), (β, γ) τότε $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$ και $(\alpha, \beta) \cap (\beta, \gamma) = \emptyset$,
$(\alpha, \beta) \cup \{\beta\} = (\alpha, \beta]$

Ιδιότητες των πράξεων Συνόλων

① Ταυτοτικές Ιδιότητες

i) $A \cup \Omega = \Omega$

ii) $A \cup \emptyset = A$

iii) $A \cap \Omega = A$

iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$

② Ιδιότητες Συμπληρώματος

i) $(A')' = A$

ii) $\Omega' = \emptyset$

iii) $A \cup A' = \Omega$

iv) $A \cap A' = \emptyset$

v) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

vi) $A - B = A \cap B'$

③ Αντιμεταθετικές Ιδιότητες

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

⑤ Επιμεριστικές Ιδιότητες

i) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

ii) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

④ Προσεταιριστικές Ιδιότητες

i) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

ii) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$

⑥ Ιδιότητες De Morgan

i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Γενικεύσεις Πράξεων Ένωσης & Τομής

Έστω σύνολο Ω και n ο αριθμός των υποσυνόλων του Ω, τα οποία συμβολίζουμε με $A_1, A_2, \dots, A_n$.

i) Ορίζουμε την ένωση των συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_n$ να είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα εκ των $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Άρα, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

ii) Ορίζουμε την τομή των συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_n$ να είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν σε όλα τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Άρα, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

- Οι παραπάνω πράξεις ορίζονται και για την περίπτωση όπου το πλήθος των συνόλων είναι αριθμήσιμα άπειρο

iii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

iv) $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

- Πολλές από τις ιδιότητες των πράξεων συνόλων μπορούν να γενικευτούν για την περίπτωση που έχουμε πεπερασμένα ή ακόμα και αριθμήσιμα άπειρα υποσύνολα του Ω.

<u>Πληθάριθμοι, Άπειρα Σύνολα</u>

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$ <u>Πληθάριθμος Συνόλου (ή πληθικός αριθμός)</u>
Ο πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι ένα "μέτρο" του αριθμού των στοιχείων που περιέχει. Συνήθως, συμβολίζεται με $|A|$.
- Αν το σύνολο A είναι πεπερασμένο τότε $|A| \in \mathbb{N}$.

(*) Αν το σύνολο A περιέχει άπειρα στοιχεία, τότε και το $|A|$ πρέπει να ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εκφράζει αυτήν την "απειρία". Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν το πλήθος των στοιχείων ενός άπειρου συνόλου ονομάζονται <u>υπερπεπερασμένοι ή άπειροι πληθάριθμοι</u>.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: <u>Πληθάριθμος του συνόλου $\mathbb{N}$ - Πρώτος Υπερπεπερασμένος Πληθάριθμος</u>
Ο πληθάριθμος $|\mathbb{N}|$ του συνόλου των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$, ορίζεται ως ο πρώτος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος και συμβολίζεται με $\aleph_0$ (άλεφ-μηδέν). Δηλαδή, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: <u>Αριθμήσιμο, Υπεραριθμήσιμο Σύνολο</u>
Ένα άπειρο σύνολο (δηλ. ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία) του οποίου ο πληθάριθμος ισούται με τον πρώτο υπερπεπερασμένο πληθάριθμο (δηλ. τον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$), ονομάζεται <u>αριθμήσιμο</u>.
Κάθε άπειρο μη-αριθμήσιμο σύνολο ονομάζεται υπεραριθμήσιμο.
<u>Note!!</u>
(*) Ένα σύνολο ονομάζεται <u>μετρήσιμο</u> αν είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο.

(*) Γενικά, ισχύει ότι $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (πρώτος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος) παρότι προφανώς $\mathbb{N} \neq \mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$.

Note!!

(*) Ο $\aleph_0$ (άλεφ-μηδέν) είναι ο "πρώτος" άπειρος (υπερπεπερασμένος) πληθάριθμος. Αυτό σημαίνει ότι κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\aleph_0$. Με άλλα λόγια, δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει άπειρο σύνολο με πληθάριθμο "μικρότερο" του $\aleph_0$.

Παρατήρηση!!

(*) Συμβολίζουμε με c τον πληθάριθμο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, δηλαδή $|\mathbb{R}| = c$. Ισχύει ότι $\aleph_0 < c$.

- Η υπόθεση του συνεχούς (ΔΕΝ έχει αποδειχθεί) υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει άλλος υπερπεπερασμένος πληθάριθμος ανάμεσα στο $\aleph_0$ και το c. Επομένως, ορίζουμε το c ως τον δεύτερον υπερπεπερασμένο πληθάριθμο, $\aleph_1 > \aleph_0$ και γράφουμε $\aleph_1 = c$.
  Ισχύει ότι $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Σχέση πληθαρίθμου ενός συνόλου & του πληθαρίθμου του δυναμοσυνόλου του

Ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου 2^{Ω} ενός οποιουδήποτε συνόλου Ω (πεπερασμένου ή απείρου) είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του αρχικού συνόλου, δηλ. $|2^{\Omega}| > |\Omega|$. Συγκεκριμένα,

α) Αν Ω πεπερασμένο, τότε $|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

β) Αν $\Omega = \mathbb{N}$, τότε $|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = c$. Δηλαδή ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου του $\mathbb{N}$ ισούται με τον πληθάριθμο των πραγμ. αριθμών ($\mathbb{R}$), $c = \aleph_1$ (κάτω από την υπόθεση του συνεχούς)

Ενδεικτική ταξινόμηση γνωστών άπειρων συνόλων σύμφωνα με τον πληθάριθμό τους

(I) Άπειρα σύνολα με πληθάριθμο, $\aleph_0$: } αριθμήσιμα σύνολα

α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$

β) Το σύνολο των ακεραίων, $\mathbb{Z}$

γ) Το σύνολο των ρητών, $\mathbb{Q}$

(II) Άπειρα σύνολα με πληθάριθμο, $\aleph_1$: } υπεραριθμήσιμα σύνολα

α) το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$

β) το σύνολο των σημείων στο n-διάστατο χώρο των πραγματικών, $\mathbb{R}^n$

γ) το δυναμοσύνολο των φυσικών, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Πραγματικές Συνολοσυναρτήσεις (real set function)

Δεδομένου του συνόλου αναφοράς Ω αναμένουμε ότι οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας (επί του Ω) θα είναι συνάρτηση που ορίζεται στο 2^Ω ή σε υποσυλλογή του, θα αποδίδει πραγματικούς αριθμούς ($\in \mathbb{R}$) και θα ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες.

Ορισμός: Πραγματική Συνολοσυνάρτηση

Έστω ένα σύνολο αναφοράς $\Omega \neq \emptyset$. Πραγματική συνολοσυνάρτηση επί του Ω καλείται οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού του 2^Ω (ή κάποια κατάλληλη υποσυλλογή του) και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

(A) Μια τέτοια συνάρτηση υπολογίζεται σε υποσύνολα του Ω, ΟΧΙ σε στοιχεία του και αποδίδει πραγματικούς αριθμούς.

π.χ. 1. $\Omega = \{\alpha\}$, $2^\Omega = \{\Omega, \emptyset\}$

πραγμ. συνολοσυνάρτηση: $\sigma: 2^\Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\sigma(\emptyset) = 0$, $\sigma(\Omega) = 1$

2. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $2^\Omega = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$

πραγμ. συνολοσυνάρτηση: $Q: 2^\Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$Q(\emptyset) = 0$$
$$Q(\{\alpha\}) = \tfrac{1}{2}$$
$$Q(\{\beta\}) = \tfrac{1}{2}$$
$$Q(\Omega) = 1$$

Για να εισαγάγουμε την έννοια του μέτρου, ας προσεγγίσουμε το θέμα διαισθητικά.

π.χ. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $2^\Omega = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να διακρίνουμε τα μέλη του υποσυνόλου 2^Ω του συνόλου αναφοράς Ω ανάλογα με κάποιο χαρακτηριστικό τους, για παράδειγμα ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων του Ω που περιέχουν. Προφανώς, το $\{\omega_1\}$ περιέχει ένα στοιχείο, το $\{\omega_1, \omega_2\}$ περιέχει 2 στοιχεία κλπ. Σε πιο μαθηματική γλώσσα, μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση (απεικόνιση) από το 2^Ω στους θετικούς ακεραίους (συμπεριλαμβανομένου του 0) με βάση τον κανόνα "σε κάθε μέλος του 2^Ω αντιστοιχούμε τον αριθμό των στοιχείων που περιέχει".

Άρα, δημιουργούμε την εξής αντιστοίχιση (συνάρτηση):

$$\{\omega_1\} \to 1,\quad \{\omega_2\} \to 1,\quad \{\omega_3\} \to 1$$
$$\{\omega_1, \omega_2\} \to 2,\quad \{\omega_1, \omega_3\} \to 2,\quad \{\omega_2, \omega_3\} \to 2$$
$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \to 3$$
$$\emptyset \to 0$$

Μπορούμε να πούμε ότι μ'αυτή την συνάρτηση "κερδίσαμε" κάποιο χαρακτηριστικό των μελών του δυναμοσυνόλου 2^{Ω} του συνόλου αναφοράς Ω.

- Οι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων αντιστοιχούν πλήρως σε κάποιες έννοιες της θεωρίας Συνόλων.

Θεωρία Πιθανοτήτων

Έστω ότι έχουμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο δεν ξέρουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμά του και βάζουμε ένα στοίχημα σχετικά με κάποιο ενδεχόμενο. Μας ενδιαφέρει να οργανώσουμε την αβεβαιότητα που μας διακατέχει σχετικά με την πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου πάνω στο οποίο έχουμε στοιχηματίσει. Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε ένα "μοντέλο πιθανότητας" που να περιγράφει το πόσο αβέβαιοι είμαστε σχετικά με την εμφάνιση του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει.

Η προσπάθεια "μοντελοποίησης" της αβεβαιότητας ενός πειράματος τύχης πρέπει να γίνει σε "μαθηματική" γλώσσα.

Για την μοντελοποίηση ακολουθούμε κάποια βήματα:

1. Συλλέγουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης και δημιουργούμε τον λεγόμενο δειγματικό χώρο Ω.

► $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Δειγματικός Χώρος

Δειγματικός χώρος Ω (ενός πειράματος τύχης) καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων τα οποία μπορεί να εμφανιστούν σε μία εκτέλεσή του

· Υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω λέγονται <u>ενδεχόμενα</u> (ή γεγονότα). Έτσι, αν $\omega \in \Omega$, το υποσύνολο $A=\{\omega\}$ του Ω θα είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου.

· Τα ενδεχόμενα (δηλ. υποσύνολα του Ω) που αποτελούνται από ένα στοιχείο λέγονται <u>στοιχειώδη ενδεχόμενα</u>.

· Αν το υποσύνολο A (ενδεχόμενο) περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία λέγεται <u>σύνθετο ενδεχόμενο</u>.

· Ολόκληρος ο δειγμ. χώρος Ω ονομάζεται <u>βέβαιο (ή σίγουρο) ενδεχόμενο</u>.

· Ένα ενδεχόμενο το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ, λέγεται <u>αδύνατο ενδεχόμενο</u>, και συμβολίζεται με ϕ.

· Για $\forall$ ενδεχόμενο A ισχύει ότι $\phi \subseteq A \subseteq \Omega$.

· Αν δύο ενδεχόμενα A, B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα λέγονται <u>ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα</u>, δηλαδή ισχύει $A \cap B = \phi$.

Άρα, το πρώτο πράγμα που κάνουμε για να μοντελοποιήσουμε την αβεβαιότητα ενός πειράματος τύχης είναι να δημιουργήσουμε ένα δειγματικό χώρο. Το επόμενο βήμα είναι το ακόλουθο:

(2) Ορίζουμε όλα τα ενδεχόμενα (υποσύνολα του Ω), την πιθανότητα των οποίων μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε. Αυτό το βήμα γίνεται σε 2 στάδια:

α) Συλλέγουμε όλα τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν σ' ένα σύνολο ενδεχομένων.

β) Σε κάθε ένα από αυτά θα προσάγουμε μία πιθανότητα ή πιο σωστά, ένα μέτρο πιθανότητας.

· Όσον αφορά το (α), το σύνολο ενδεχομένων θα πρέπει να έχει μία συγκεκριμένη δομή, ώστε να μας εξασφαλίζει ότι κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων καταλήγουν πάντα σε κάποιο άλλο ενδεχόμενο.

π.χ. ρίψη ενός ζαριού

Αν στοιχηματίζαμε είτε στο ενδεχόμενο $\{1,2\}$ είτε στο $\{6\}$, θα θέλαμε αυτό το στοίχημα να είναι ισοδύναμο με το να στοιχηματίζουμε στο ενδεχόμενο $\{1,2,6\} = \{1,2\} \cup \{6\}$.

Αυτό σημαίνει ότι απαιτούμε αλλά τον χώρο ενδεχομένων να είναι "κλειστός" ως προς κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων (π.χ. ενώσεις) →

η πιο χρήσιμη δομή "κλειστότητας" αποδεικνύεται να 'ναι η σ-άλγεβρα

Άρα, εφ' όσον εξασφαλίσουμε αυτήν την ιδιότητα για το χώρο ενδεχομένων, στη συνέχεια μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητες σε καθένα από τα στοιχεία αυτού του χώρου. Άρα, θα ορίσουμε μία πραγματική συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το χώρο ενδεχομένων και πεδίο τιμών τους μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αυτή η συνολοσυνάρτηση θα πρέπει να έχει κάποιες ιδιότητες.

▶ **Ορισμός**: Κατανομή (ή μέτρο) πιθανότητας (probability distribution/measure)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω} (ή μία συλλογή του) την οποία ονομάζουμε χώρο ενδεχομένων. Πάνω στον χώρο ενδεχομένων ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}$, η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, για $\forall$ ενδεχόμενο $A \in 2^{\Omega}$ (μη-αρνητική πιθανότητα)

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (κανονικότητα)

iii) Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n \in 2^{\Omega}$ τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, δηλ. $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$, ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(προσθετικότητα)}$$

Γενικά, για $\forall$ ακολουθία A_i, $i=1,2,\ldots$ ενδεχομένων (μελών του 2^{Ω}), τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad \text{(αριθμήσιμη προσθετικότητα)}$$

Παρατηρήσεις.

1. Από τον ορισμό προκύπτει $P(\emptyset)=0$.
Επειδή $\Omega \cup \Omega' = \Omega \cup \emptyset = \Omega$ και $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, τα Ω και $\emptyset$ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας:
$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega) = 1$ (δεν γίνεται $P(\emptyset) > 0$) άρα $P(\emptyset)=0$.

2. $P(\Omega)=1$ και $P(\emptyset)=0$.
Αυτό δεν σημαίνει ότι το Ω είναι το μοναδικό ενδεχόμενο με πιθανότητα ίση με την μονάδα, ούτε το $\emptyset$ είναι το μοναδικό ενδεχόμενο με πιθανότητα ίση με το 0. Μπορούμε, για παράδειγμα, να έχουμε ένα ενδεχόμενο $A \in 2^\Omega$ και ένα άλλο $B \in 2^\Omega$, τέτοια ώστε $P(A)=1$ και $P(B)=0$ με $A \subsetneq \Omega$ και $\emptyset \subsetneq B$.

3. Για $\forall$ ενδεχόμενο $A \in 2^\Omega$, ισχύει $0 \le P(A) \le 1$. Εφόσον η P είναι μέτρο θα πληροί και την ιδιότητα της μονοτονικότητας. Συνεπώς, αφού κάθε ενδεχόμενο $A \in 2^\Omega$ είναι υποσύνολο του Ω, θα ισχύει ότι $P(A) \le P(\Omega)$ και κατά συνέπεια, αφού $P(A) \ge 0$ και $P(\Omega)=1$ προκύπτει $0 \le P(A) \le 1$.

4. Τον όρο "ενδεχόμενο" τον αποδίδουμε μόνο στα υποσύνολα του Ω που περιέχονται στο χώρο ενδεχομένων 2^Ω (ή κάποια υποσυλλογή του) και όχι σε κάθε υποσύνολο του Ω. Φυσικά, όταν ο χώρος ενδεχομένων είναι το δυναμοσύνολο του Ω, 2^Ω τότε κάθε υποσύνολο του Ω είναι ενδεχόμενο. Αν όμως ο χώρος ενδεχομένων δεν συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω, τότε μόνο τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω θα φέρουν τον τίτλο ενδεχόμενο.

Π.χ. $\Omega = \{1, 2, 5, 6\}$ και $F \subset 2^\Omega$ όπου $F = \{\{1,2\}, \{5,6\}, \Omega, \emptyset\}$
η F δεν συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω. Επομένως, τα μόνα υποσύνολα του Ω που θεωρούμε ως ενδεχόμενα είναι αυτά που βρίσκονται στην F. Πολλά άλλα υποσύνολα του Ω δεν είναι ενδεχόμενα όπως τα $\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{6\}$

Δειγματικοί Χώροι

QS: "Γιατί να μην θεωρούμε πάντα το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου Ω ως το σχετικό χώρο ενδεχομένων??"

H απάντηση σ'αυτό το ερώτημα εξαρτάται απ'την φύση του δειγματικού χώρου.
Υπάρχουν τρία είδη δειγματικών χώρων:

i) Πεπερασμένος δειγματικός χώρος: ο δειγμ. χώρος Ω περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

ii) Διακριτός δειγματικός χώρος: ο δειγμ. χώρος Ω περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία.

iii) Υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος: ο δειγμ. χώρος Ω περιέχει υπεραριθμήσιμο αριθμό στοιχείων.

(*) Αν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii), τότε μπορούμε πάντα να θεωρούμε το δυναμοσύνολο του Ω ως τον κατάλληλο χώρο ενδεχομένων. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι όλα τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω μπορούν να θεωρηθούν ενδεχόμενα δηλαδή μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητα σε κάθε ένα απ'αυτά.
Αν όμως ο δειγμ. χώρος Ω είναι υπεραριθμήσιμος, τότε το δυναμοσύνολο του Ω δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων, υπό την έννοια ότι δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση πιθανότητας, η οποία να ικανοποιεί την συνθήκη της αριθμήσιμης προσθετικότητας.
Σ'αυτή την περίπτωση (iii), επιλέγουμε τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω δηλαδή στα οποία μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητα.

π.χ. $\Omega = \mathbb{R}$, το δυναμοσύνολο $2^{\mathbb{R}}$ είναι υπεραριθμήσιμο και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων. Δηλαδή, στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}$ υπάρχουν άπειρα υποσύνολα που δεν είναι ενδεχόμενα.

<u>Κατασκευή Συναρτήσεων Πιθανότητας & Δειγματικοί χώροι</u>

Υποθέτουμε ότι ο δειγμ. χώρος Ω είναι πεπερασμένος και περιέχει n στοιχεία, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω} (ή $P(\Omega)$).

- Με ποιο τρόπο μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητες σε $\forall$ ενδεχόμενο $A \in 2^{\Omega}$??
- Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε την συν. πιθανότητας $P: 2^{\Omega} \to [0,1]$ σε μία τέτοια περίπτωση??

Η απάντηση έχει ως εξής:

<u>Βήμα 1</u>: Θεωρούμε όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του 2^{Ω}, δηλαδή τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$.

<u>Βήμα 2</u>: Σε καθένα κι' αυτά ορίζουμε μία πιθανότητα

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \; i = 1, 2, \dots, n \text{ με τέτοιο τρόπο ώστε } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Αυτός ο ορισμός πιθανοτήτων για καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι επαρκής για να ορίσει την συν. πιθανότητας $P: 2^{\Omega} \to [0,1]$ πάνω σε όλο τον χώρο ενδεχομένων 2^{Ω} ή $P(\Omega)$.

Συνεπώς, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in 2^{\Omega}$ αρκεί να δούμε πόσα και ποια ω_i περιέχει και να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων p_i, δηλαδή $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

(*) <u>Note</u>: Αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A ορίζεται ως το πηλίκο του πλήθους $\omega_i \in A$ προς το πλήθος όλων των $\omega_i \in \Omega$. Δηλαδή, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

<u>π.χ.</u> αν $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ με $m \leq n$ τότε $P(A) = \frac{m}{n}$

- Στην περίπτωση κατά την οποία ο δειγματικός χώρος είναι διακριτός και πάλι μπορούμε να προσάγουμε πιθανότητες σε καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του 2^{Ω} δηλ. τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in 2^{\Omega}$

ορίζεται ως $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$

(*) Συμπέρασμα: Όταν ο δειγμ. χώρος Ω είναι είτε πεπερασμένος είτε διακριτός (αριθμήσιμα άπειρος), μπορούμε να θεωρήσουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω και μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση πιθανότητας.

Παραδείγματα Συναρτήσεων Πιθανότητας

Δίνουμε κάποια παραδείγματα συν. πιθανότητας, οι οποίες οφείλουν να ικανοποιούν τις απαιτήσεις που θέσαμε στην συνολοσυνάρτηση P, προκειμένου να την αποκαλούμε πιθανότητα.

1) Ρίψη νομίσματος

Έστω ρίχνουμε ένα νόμισμα με δυνατά αποτελέσματα K και Γ. άρα ο δειγμ. χώρος $\Omega = \{K, \Gamma\} \rightarrow$ πεπερασμένος δειγμ. χώρος

Ορίζουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω, 2^{Ω}.

$2^{\Omega} = \{\{K\}, \{\Gamma\}, \Omega, \emptyset\}$

Όσον αφορά την συν. πιθανότητας μπορούμε να ορίσουμε μία P πάνω στο χώρο ενδεχομένων 2^{Ω}, η οποία να πληροί τις απαιτήσεις της συν. πιθανότητας. Δηλαδή να προσάγουμε σε $\forall$ στοιχειώδες ενδεχόμενο έναν αριθμό p_j, $j=1,2$ όπου $0 \le p_j \le 1$ με τέτοιο τρόπο ώστε $P(\Omega) = \sum p_j = 1$ και να ορίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in 2^{\Omega}$, το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων p_j, δηλ. $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να έχουμε:

$p_1 = P(\{K\}) = \frac{1}{2}$ και $p_2 = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$. Προφανώς $P(\Omega) = 1$.

Επίσης, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα του 2^{Ω}, τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους. Ισχύει $P(\{K\} \cup \{\Gamma\}) = P(\{K\}) + P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(\Omega)$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $P: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ ορισμένη ως

$P(\{K\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ είναι συν. πιθανότητας.

(*) <u>Note:</u> Η παραπάνω συν. πιθανότητας βασίστηκε στην έννοια των "ισοπίθανων" στοιχειωδών ενδεχομένων και είναι κατάλληλη για την περίπτωση που το νόμισμα είναι "δίκαιο".
Στην περίπτωση ενός "κάλπικου" νομίσματος και πάλι θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία συν. πιθανότητας πάνω στον χώρο ενδεχομένων 2^{Ω}, μόνο που τώρα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν θα είναι ισοπίθανα. Αν προσάγουμε πιθανότητα $0 \le p \le 1$ στο 1 απ' τα 2 στοιχειώδη ενδεχόμενα, τότε αρκεί να προσάγουμε πιθανότητα $1-p$ στο άλλο, προκειμένου να έχουμε ορίσει μία συν. πιθανότητας $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ που να ικανοποιεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις (δηλ. την $P(\Omega)=1$ και την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας).

2) Έστω διακριτός δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,\dots\}$ και χώρος ενδεχομένων το δυναμοσύνολό του 2^{Ω}. Αφού ο δειγμ. χώρος Ω είναι διακριτός μπορούμε να ορίσουμε μία συν. πιθανότητας μέσω των στοιχειωδών ενδεχομένων $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots$ μόνο που τώρα <u>δεν</u> μπορούμε να προσάγουμε ίσες πιθανότητες σε καθένα απ' τα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Μπορούμε όμως σε καθένα ξ'χωριστά να προσάγουμε διαφορετική πιθανότητα. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον κανόνα $P(\{i\}) = \frac{1}{2^i},\ i=1,2,3,\dots$

Ο καθ' αυτόν τον τρόπο ορισμός πιθανότητας είναι αποδεκτός, καθώς ορίζει μία συν. πιθανότητας $\mathbb{P}$ πάνω στο 2^{Ω} που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πιθανότητας.

3) Έστω ο υπεραριθμήσιμος δειγμ. χώρος $\Omega = (0,1]$. Σε αντίθεση με τις 2 προηγούμενες περιπτώσεις σ' αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το δυναμοσύνολο του Ω ως χώρο ενδεχομένων γιατί υπάρχουν μη-μετρήσιμα υποσύνολα του Ω. → <u>Θεωρία Μέτρου</u> για να μας πει ποιος είναι ο κατάλληλος χώρος ενδεχομένων και πώς ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας.
↳ γίνεται σ' αυτή την περίπτωση να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας, ορισμένο σ' ένα χώρο ενδεχομένων → Θεώρημα Επέκτασης (<u>εκτός</u> σκοπού του μαθήματος)

<u>Περαιτέρω παραδείγματα πειραμάτων τύχης με διαφορετικούς δειγμ. χώρους</u>

<u>παράδειγμα 1</u>: ρίψη ζαριού

δυνατά αποτελέσματα: 1, 2, 3, 4, 5, 6

<u>άρα</u> δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

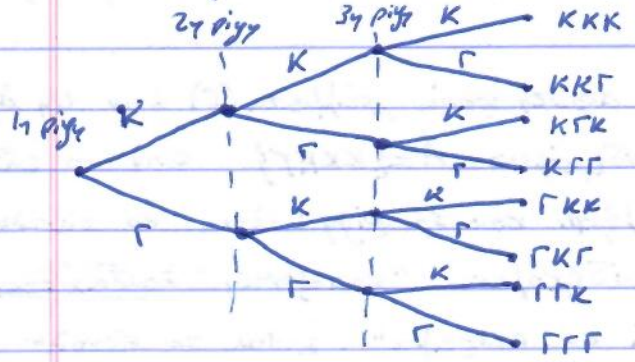
οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5, 6 αποτελούν στοιχεία του δειγματικού χώρου, ενώ τα σύνολα $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$ είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω.

Ένα σύνθετο ενδεχόμενο δίνεται από υποσύνολο $B_1 = \{2, 4, 6\}$ ή $B_2 = \{3, 4, 5, 6\}$. Υπάρχουν και άλλα σύνθετα ενδεχόμενα.

<u>παράδειγμα 2</u>: ρίψη νομίσματος 3 φορές

δυνατά αποτελέσματα: ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΓΓ, ΓΚΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ

Πώς προκύπτουν? → δενδροδιάγραμμα



8 δυνατά αποτελέσματα για το πείραμα τύχης της ρίψης ενός νομίσματος 3 φορές

<u>άρα</u> ο δειγμ. χώρος του συγκεκριμένου πειράματος τύχης είναι:
$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

Το ενδεχόμενο να "εμφανίζονται 3 ίδια αποτελέσματα" περιγράφεται από υποσύνολο του Ω: $A = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$ ενώ το ενδεχόμενο να "εμφανίζονται 2 ακριβώς φορές γράμματα (Γ)" περιγράφεται από ενδεχόμενο $B = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\}$.

Στα δύο αυτά παραδείγματα, οι δειγματικοί χώροι περιέχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και λέγονται <u>πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι</u>.

Είναι φανερό ότι κάθε ενδεχόμενο (υποσύνολο) ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο.

<u>Παράδειγμα 3</u>: ρίψη νομίσματος άπειρες φορές

Θεωρούμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης του νομίσματος μέχρις ότου να φέρουμε για πρώτη φορά γράμματα (Γ), δηλ. ρίψη νομίσματος άπειρες φορές.
Τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης δεν μπορούμε να τα καταγράψουμε αναλυτικά. Μπορεί να εμφανιστούν τα γράμματα στην 1η ρίψη, μπορεί στην 2η ρίψη, στην 3η ρίψη κ.ο.κ.
Άρα, τα δυνατά αποτελέσματα μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

Δυνατά αποτελέσματα: Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ, ...

Η παραπάνω περιγραφή σημαίνει ότι θα πάρουμε Γ ως αποτέλεσμα αν τα γράμματα (Γ) που θέλουμε εμφανιστούν στην 1η ρίψη, το αποτέλεσμα ΚΓ θα το πάρουμε αν στην πρώτη ρίψη έρθει Κ και στην 2η ρίψη έρθει Γ κ.ο.κ.
<u>άρα</u> ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ, ΚΚΚΚΓ, \ldots\}$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζεται για πρώτη φορά γράμματα (Γ) στην 4η ρίψη" είναι το απλό (στοιχειώδες) ενδεχόμενο: $A = \{ΚΚΚΓ\}$, ενώ το ενδεχόμενο "η διαδικασία τερματίζεται μέχρι την 3η ρίψη" είναι το σύνολο: $B = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ\}$. Τέλος, το ενδεχόμενο "χρειάζονται <u>τουλάχιστον</u> 4 ρίψεις για να τερματιστεί το πείραμα" είναι το σύνολο:
$Γ = \{ΚΚΚΓ, ΚΚΚΚΓ, ΚΚΚΚΚΓ, \ldots\}$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι απειροσύνολο (απειροπληθές σύνολο δηλ. άπειρο πλήθος στοιχείων) και μάλιστα αριθμήσιμο, δηλαδή έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (διαισθητικά, γιατί? Επειδή είναι 1η, 2η, 3η, 4η... ρίψη δηλ. είναι σαν ένα δειγμ. χώρο $\Omega = \mathbb{N}$ δηλαδή $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$).
<u>Άρα</u>, στην περίπτωση αυτή έχουμε <u>διακριτό δειγματικό χώρο</u> δηλαδή ο δειγμ. χώρος περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία.

Τα ενδεχόμενα (υποσύνολα) ενός διακριτού (ή απείρως αριθμήσιμου) δειγμ. χώρου μπορούν να είναι είτε πεπερασμένα (<u>π.χ.</u> ενδεχόμενο Β) είτε άπειρα (<u>π.χ.</u> ενδεχόμενο Γ)

<u>Παράδειγμα 4</u>

Προκειμένου να ελέγξουμε την ποιότητα των λαμπτήρων που εξέρχονται από μία γραμμή παραγωγής, παίρνουμε έναν λαμπτήρα στην τύχη, τον τοποθετούμε στην πρίζα και καταγράφουμε τον χρόνο (σε ώρες) μέχρις ότου να παύσει να λειτουργεί. Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τον χρόνο, η συνολική διάρκεια λειτουργίας του λαμπτήρα θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη-αρνητική πραγματική τιμή. Επομένως, ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι:

$\Omega=\{t: t\geq 0\} = [0,+\infty) = \mathbb{R}_+ (ή\ \mathbb{R}^*)$

Το υποσύνολο του Ω: $A=\{t: 0\leq t\leq 500\}=[0,500]$ περιγράφει το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα είναι το πολύ 500 ώρες", ενώ το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα υπερβαίνει τις 300 ώρες" αντιστοιχεί στο υποσύνολο: $B=\{t: t\geq 300\}=[300,\infty)$.

<u>Άρα</u>, ο δειγματικός χώρος Ω είναι <u>μη αριθμήσιμος</u>.
Ένας τέτοιος χώρος καλείται <u>υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος</u>.

(*) Η μελέτη ενός υπεραριθμήσιμου δειγματικού χώρου απαιτεί συνήθως τελείως διαφορετικούς χειρισμούς από εκείνους που χρειάζονται για την μελέτη των πεπερασμένων ή των διακριτών (απείρως αριθμήσιμων) δειγματικών χώρων.

(*) Όταν ο δειγματικός χώρος Ω είναι είτε πεπερασμένος είτε διακριτός τότε κάθε υποσύνολό του θεωρείται ότι είναι ένα ενδεχόμενο. Ωστόσο, όταν είναι υπεραριθμήσιμος, υπάρχουν "μη αποδεκτά" υποσύνολα του Ω που δεν θεωρούνται ενδεχόμενα του δειγμ. χώρου Ω. → το θέμα αυτό αποτελεί αντικείμενο μιας ιδιαίτερης περιοχής της Μαθηματικής Ανάλυσης Ανάλυσης που ονομάζεται "Θεωρία Μέτρου".

Έτσι, στην ύλη που θα εξετάσουμε, όταν αναφερόμαστε σε ενδεχόμενα $A, B, \Gamma, \ldots$ του δειγμ. χώρου Ω, αυτά θα είναι "αποδεκτά" υποσύνολά του (δηλ. μετρήσιμα). Συγκεκριμένα, αν ο δειγμ. χώρος που θα χρησιμοποιούμε είναι είτε πεπερασμένος είτε διακριτός, τότε θα χρησιμοποιούμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω, ενώ αν ο δειγματικός μας χώρος Ω είναι υπεραριθμήσιμος τότε ως χώρο ενδεχομένων θα χρησιμοποιούμε μία συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω (όχι "αποδεκτά" υποσύνολά του)

<u>Επιπλέον Παραδείγματα Κατανομών Πιθανότητας</u>

1. Έστω $\Omega = \{K\}$, δυναμοσύνολο-χώρος ενδεχομένων: $2^{\Omega} = \{\{K\}, \phi\} = \{\Omega, \phi\}$

- Οι μονοσύνολοι δειγματικοί χώροι έχουν αναγκαστικά μοναδική κατανομή πιθανότητας και την ξέρουμε. Ονομάζεται <u>εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας</u> στο K και ορίζεται ως $\mathbb{P}(\{K\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. Έστω $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Το δυναμοσύνολο του Ω είναι $2^{\Omega} = \{\phi, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega\}$.
Έστω $q \in [0,1]$ και κατανομή πιθανότητας $P_q : 2^{\Omega} \to [0,1]$ που ορίζεται ως $P_q(\phi) = 0$, $P_q(\{K\}) = q$, $P_q(\{\Gamma\}) = 1-q$, $P_q(\Omega) = 1$.

- Όλες οι κατανομές πιθανότητας που ορίζονται σ' ένα δειγμ. χώρο Ω που περιέχει 2 στοιχεία έχουν την παραπάνω μορφή.
Για παράδειγμα, αν $q = \frac{1}{2}$ έχουμε το πείραμα τύχης του αμερόληπτου κέρματος.
Υπάρχουν τόσες κατανομές πιθανότητας σε αυτό το Ω, όσα και τα $q \in [0,1]$. Ουσιαστικά, στο ένα στοιχείο (π.χ. K) αποδίδεται μία πιθανότητα (q) και στο άλλο (δηλαδή, στο στοιχείο Γ) η συμπληρωματική του πιθανότητα (δηλαδή $1-q$).
- Για $q = 1 \Rightarrow$ εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο K, αφού $P(\{K\}) = 1$.
- Για $q = 0 \Rightarrow$ εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο Γ, αφού $P(\{\Gamma\}) = 1$.

3. Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι. Ο δειγμ. χώρος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
$A = \{2,4,6\}$ = "ζυγό αποτέλεσμα"
$B = \{1,3,5\}$ = "μονό —"—"
Έχουμε τα 6 στοιχειώδη ενδεχόμενα: $E_i = \{i\}$, $\forall\, i = 1,2,3,4,5,6$
Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο απαιτούμε το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που περιγράφει αυτό το πείραμα να δίνει την ίδια πιθανότητα δηλαδή $\frac{1}{6}$ σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6}$ για $\forall\, i = 1,2,3,4,5,6$.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A (η οποία διαισθητικά είναι προφανώς ίση με $\frac{1}{2}$), παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο A μπορεί να εκφραστεί ως ένωση στοιχειωδών ενδεχομένων. Δηλαδή,
$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ και γνωρίζουμε ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους (αμοιβαίως αποκλειόμενα).
Άρα, από την (iii) ιδιότητα (προσθετικότητα) του ορισμού μιας κατανομής πιθανότητας έχουμε: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_2 \cup E_4 \cup E_6) = \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_4) + \mathbb{P}(E_6) =$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Αντίστοιχα, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_5) = \frac{1}{2}$

Παρατηρήσεις:
1. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα.
2. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι πάντα ξένα μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, αν ο δειγμ. χώρος Ω είναι πεπερασμένος, για να οριστεί το μέτρο πιθανότητας για όλα τα ενδεχόμενα αρκεί να οριστεί για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα.
Γιατί?? Επειδή μπορούμε να εκφράσουμε τα ενδεχόμενα ως την ένωση των στοιχειωδών ενδεχομένων. Έστω ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A το οποίο αποτελείται από k στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Εκφράζοντας το A ως την ένωση των ξένων στοιχειωδών ενδεχομένων $A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_k\}$ και χρησιμοποιώντας την τρίτη ιδιότητα του ορισμού του μέτρου πιθανότητας μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του A ως το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων $\{\omega_i\}$ ως:
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

4. Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε την έννοια ενός «τυχαίου πραγματικού αριθμού» στο διάστημα $[0,1]$. Δηλαδή, έστω $\Omega=[0,1]$. Σ' αυτή την περίπτωση κάθε ενδεχόμενο A είναι ένα υποσύνολο του $[0,1]$ και το A περιγράφει το ενδεχόμενο ο τυχαίος αυτός αριθμός να ανήκει στο A.
π.χ. αν το ενδεχόμενο $A=[0,\frac{1}{2}]$, λογικά θα θέλαμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που να μας λέει ότι η πιθανότητα ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός μεταξύ $[0,1]$ να είναι μικρότερος ή ίσος με το $\frac{1}{2}$, ισούται με $\frac{1}{2}$. Με άλλα λόγια να έχει $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$.
Γενικά, θα θέλαμε για κάθε υποδιάστημα B του $[0,1]$, η τιμή του μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}(B)$ να ισούται με το μήκος αυτού του διαστήματος.
Ωστόσο, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι Αδύνατον να οριστεί ένα μέτρο πιθανότητας στο $\Omega=[0,1]$ το οποίο να ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες του ορισμού μας και επίσης, να δίνει για κάθε υποδιάστημα του $[0,1]$, $\mathbb{P}(B)=$ μήκος του B.
· Η βαθύτερη αιτία της δυσκολίας είναι η ύπαρξη κάποιων παθολογικών υποσυνόλων B του $[0,1]$ τα οποία δεν μπορούμε να "μετρήσουμε".
· Η λύση σ' αυτό το πρόβλημα είναι να περιορίσουμε τα υποσύνολα του δειγμ. χώρου Ω στα οποία απαιτούμε να ορίζεται το μέτρο πιθανότητας.

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Ας προσεγγίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων διαισθητικά.
π.χ. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πείραμα τυχαίο και δύο σχετικά με αυτό ενδεχόμενα A_1, A_2 για τα οποία γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες να συμβούν είναι $P(A_1)=0.5$ και $P(A_2)=0.4$. Αυτό σημαίνει ότι για ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος, το ενδεχόμενο A_1 θα συμβεί περίπου στο 50% των επαναλήψεων.
Αν το A_2 είναι ανεξάρτητο από το A_1, τότε η πραγματοποίηση του A_1 δεν θα πρέπει να επηρεάζει την πιθανότητα του να συμβεί το A_2. Αυτό δηλαδή σημαίνει ότι αν απομονώσουμε μόνο τις φορές που έχει συμβεί το A_1, τότε το A_2 θα πρέπει να συνεχίζει να εμφανίζεται με συχνότητα 40%. Άρα, η πιθανότητα του να συμβεί και το A_1 και το A_2

ταυτόχρονα $(A_1 \cap A_2)$ θα πρέπει να ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανοτήτων των A_1 και A_2, δηλαδή

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

▶ **Ορισμός** : <u>Ανεξαρτησία Δύο Ενδεχομένων</u>

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ και δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2 \in 2^\Omega$ (χώρος ενδεχομένων - δυναμοσύνολο). Τα ενδεχόμενα αυτά θα λέγονται <u>ανεξάρτητα</u> αν και μόνο αν $\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ο δειγμ. χώρος Ω = {♣, ♢, ♡, ♤}. Ο χώρος ενδεχομένων είναι το δυναμοσύνολο του Ω, 2^Ω και η συν. πιθανότητας είναι $\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$ που προσδίδει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{4}$ σε καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A_1 = {♣, ♢} και A_2 = {♣, ♡} καθένα εκ των οποίων έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{2}$. Γιατί? Αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A_1 είναι

$$P(A_1) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων } A_1}{\text{πλήθος στοιχείων } \Omega} = \frac{\#A_1}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$ Αντίστοιχα, για το A_2.

Είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα ενδεχόμενα??

Πρώτα βρίσκουμε την τομή των δύο ενδεχομένων δηλαδή $A_1 \cap A_2$ = {♣} το οποίο είναι ενδεχόμενο πιθανότητας ίσης με $\frac{1}{4}$.

Επιπλέον είναι προφανές ότι $P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

<u>άρα</u> αφού $\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{1}{4}$, τα A_1, A_2 είναι <u>ανεξάρτητα</u>.

- Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα και να την ορίσουμε για άπειρα ενδεχόμενα.

(*) **Note**: Η ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων είναι διαφορετική έννοια από την έννοια των ασυμβίβαστων ή αμοιβαίως αποκλειόμενων ενδεχομένων.

- Δύο ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα αν $A \cap B = \emptyset$. Δηλαδή τα δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο και δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως.

- Η ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων ουσιαστικά σημαίνει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ένα ενδεχόμενο δεν μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου ενδεχομένου. Δηλαδή η πραγματοποίηση του ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση ή μη του άλλου ενδεχομένου.

Παράδειγμα

Έστω τυχαίο πείραμα → ρίψη ενός ζαριού 2 φορές.

ενδεχόμενο A = "η ένδειξη του πρώτου ζαριού να'ναι 3" $= \{3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6\}$

–//– Γ = "το άθροισμα των ενδείξεων των 2 ζαριών να είναι 7" $=$

$= \{1.6, 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1\}$

άρα δειγμ. χώρος $\Omega = \{\underbrace{1.1, 1.2, 1.3, \ldots, 2.4, 2.5, 2.6, \ldots 6.4, 6.5, 6.6}_{36 \text{ στοιχεία (δυνατά αποτελέσματα)}}\}$

άρα αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Αντίστοιχα η $P(\Gamma) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. άρα $P(A) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Έχουμε $A \cap \Gamma = \{3.4\}$ άρα $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{36}$

άρα $P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$ άρα τα ενδεχόμενα A, Γ είναι ανεξάρτητα.

Ωστόσο, $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ άρα τα ενδεχόμενα A, Γ δεν είναι ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.