Ομάδα Ασκήσεων 1

Γενικές Έννοιες και ορισμοί

1η Ομάδα Ασκήσεων

Για παρακάτω το Ω θα είναι το σύνολο αναφοράς (δειγματοχώρος - στοιχειώδη ενδεχόμενα),

το Σ_Ω η συλλογή υποσυνόλων του Ω στα οποίοι μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες, και

το 2^Ω το δυναμοσύνολο του Ω, (όταν το Ω είναι πεπερασμένο τότε $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$), και

$\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας επί του Ω.

1. Αν $A,B \in 2^\Omega$ να δειχθεί ότι: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

κ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

[De Morgan Laws]

→ Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διαγράμματα Venn. (*)

2. Αν $A,B,\Gamma \in 2^\Omega$ να δειχθεί ότι:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

→ (*) Αναλόγως [κοινός παράγοντας το A]

3. Αν $A,B,\Gamma \in 2^\Omega$ να δειχθεί ότι:

$$A = [A \cap (B \cap \Gamma)] \cup [A \cap (B \cap \Gamma')] \cup [A \cap (B' \cap \Gamma)] \cup [A \cap (B' \cap \Gamma')]$$

4. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(B) = 0$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(A) = 0$.

5. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(A) = 1$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(B) = 1$.

6. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.

7. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$.

8. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(A' \cup B') = 0$.

9. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$ να δειχθεί ότι κ' $\mathbb{P}(A' \cup B') = 1$.

10. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ κι' $\mathbb{P}(B) = 0$

να δειχθεί ότι κι' $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$.

11. Αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ κι' $\mathbb{P}(B) = 1$

να δειχθεί ότι κι' $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.

12. Να δειχθεί ότι αν $A, B, \Gamma \in \Sigma_\Omega$ τότε

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup \Gamma) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\Gamma).$$

13. Έστω ότι $\Omega = \{HH, TT, TH, HT\}$. Έχουμε ότι $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$. Να βρεθεί το 2^Ω. Έστω ότι η $\mathbb{P}$ ορίζεται από τις σχέσεις $\mathbb{P}(HH) = \mathbb{P}(TT) = \mathbb{P}(TH) = \mathbb{P}(HT) = 1/4$. Να βρεθεί η $\mathbb{P}$.

14. Έστω ότι $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $\Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$.
Να βρεθεί $Q: 2^\Omega \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότη-

τες της θετικότητας κι' της τυποποίησης, αλλά όχι της προσθετικότητας.

15. Αν $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Να βρεθεί το 2^{Ω}. Να βρεθεί το σύνολο των κατανομών πιθανότητας που ορίζονται στο Ω.

16. Έστω $B \in \Sigma_\Omega$, με $\mathbb{P}(B) > 0$. Έστω η $\mathbb{P}_B : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από:

$$\text{αν } A \in \Sigma_\Omega, \quad \mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

[δεσμευμένη πιθανότητα του A ως προς το B]

Να δειχθεί ότι η $\mathbb{P}_B$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του Ω.

17. Στο υπόβαθρο της άσκησης 16, έστω $A \in \Sigma_\Omega$ με $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (τα A, B ονομάζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους). Να δειχθεί ότι $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Να δειχθεί ότι αν $B = \Omega$ τότε $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ $\forall A \in \Sigma_\Omega$.